

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
“МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА”  
Физический факультет  
Кафедра атомной физики, физики плазмы и микроэлектроники

На правах рукописи

Шарапова Полина Родионовна

**Квантовые корреляции и перепутывание в  
неклассических состояниях света и атомных  
системах, взаимодействующих с ними**

01.04.05 – Оптика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель  
д. ф.-м. н., проф.  
О. В. Тихонова

Москва – 2015

# Содержание

Введение.....	4
Глава 1. Литературный обзор.....	13
Глава 2. Пространственные свойства и корреляции яркого сжатого вакуума.....	26
2.1. Теоретическая подход, разработанный для описания пространственных свойств яркого сжатого вакуума .....	27
2.1.1. Цилиндрическая система координат .....	30
2.1.2. Декартова система координат.....	36
2.2. Пространственная структура излучения и корреляций в состоянии яркого сжатого вакуума с точки зрения мод Шмидта.....	39
2.2.1. Угловые распределения интенсивности и корреляций.....	39
2.2.2. Зависимость пространственных свойств яркого сжатого вакуума от интенсивности накачки.....	45
2.3. Фильтрация пространственного излучения диафрагмой.....	48
2.4. Выделение одной пространственной моды в схеме с двумя пространственно разделенными кристаллами .....	54
2.5. Проявление эффекта анизотропии .....	62
2.5.1. Пространственное распределение интенсивности и модовая структура нелинейного сигнала.....	63
2.5.2. Генерация высокоинтенсивного излучения за счет эффекта пространственного сноса.....	70
Глава 3. Взаимодействие модельного ридберговского атома с неклассическими полями .....	79

3.1. Взаимодействие ридберговского атома с полем в состоянии сжатого вакуума и когерентным полем с различным числом фотонов .....	79
3.1.1. Модель системы “атом+поле” .....	80
3.1.2. Аналитическое решение.....	85
3.1.3. Динамика системы и режим интерференционной стабилизации ..	87
3.1.4. Перепутывание между атомной и полевой подсистемами.....	94
3.2. Взаимодействие ридберговского атома с одним или несколькими фотонами .....	100
3.2.1. Интерференционная стабилизация и перепутывание в случае $\Lambda$ – схемы .....	101
3.2.2. Интерференционная стабилизация и перепутывание в случае $V$ – схемы .....	105
3.3. Взаимодействие классического лазерного поля с модельным ридберговским атомом, приготовленным в смешанном состоянии посредством воздействия на него квантового поля нескольких фотонов ....	124
3.3.1. Аналитическая модель .....	125
3.3.2. Динамика смешанного состояния модельного атома в классическом лазерном поле.....	128
3.3.3. Восстановление матрицы плотности смешанного атомного состояния посредством приложения классического лазерного поля.....	131
Заключение .....	137
Литература .....	139

## Введение

Быстрый прогресс экспериментальной квантовой оптики в последнее время привел к возможности генерации различных неклассических состояний света, таких как бифотонные пары, однофотонные состояния и “сжатые” состояния света. Одним из перспективных и широко изучаемых на сегодняшний день неклассических объектов является поле в состоянии “сжатого” вакуума, получаемое в процессе параметрического рассеяния света в средах с квадратичной нелинейностью при большой интенсивности накачки и характеризующееся большим средним числом фотонов, фактически являясь макроскопическим квантовым состоянием света. Кроме того, такое поле обладает подавленной дисперсией вдоль одной из квадратур, что весьма важно для различных метрологических приложений. И наконец, такое поле сохраняет свои существенно неклассические свойства даже при весьма большом среднем числе фотонов, и, как следствие, характеризуется макроскопической перепутанностью между сигнальными и холостыми пучками фотонов. Такие неклассические поля обнаруживают высокую степень скоррелированности входящих в них фотонов, что является крайне перспективным для целого ряда практических приложений, таких как хранение и передача квантовой информации, квантовая криптография, квантовая телепортация, прецизионные квантовые измерения и т. д. Однако теоретически пространственно-частотные корреляции фотонов в ярких сжатых состояниях света изучены крайне мало. В отличие от бифотонных пар яркие сжатые состояния не могут быть описаны в рамках теории возмущений, в связи с чем возникает необходимость разработки новых непerturbативных теоретических методов и подходов.

В настоящее время существует несколько экспериментальных групп мирового уровня, успешно выполняющих эксперименты по генерации ярких “сжатых” состояний света, а также измерению различных корреляционных характеристик в “сжатых” полях. Однако указанные эксперименты до сих

пор не имеют полного теоретического описания и требуют подробного теоретического исследования.

Еще одним важным направлением исследований является взаимодействие таких неклассических полей с атомно-молекулярными системами, которое характеризуется целым рядом качественно новых эффектов, не имеющих места в случае классических полей или приобретающих новую специфику. В частности, возникает перепутывание между атомной и полевой подсистемами, что открывает новые возможности в задачах метрологии, разработки квантовых стандартов частоты, а также в создании управляемых атомных квантовых «битов», на основе которых ведется построение протоколов хранения и передачи квантовой информации.

Таким образом, анализ и теоретическое описание корреляций и перепутывания, возникающих в неклассических состояниях света и атомных системах, взаимодействующих с ними, является крайне актуальной задачей.

**Целью данной работы** является теоретическое исследование пространственных корреляций в ярких «сжатых» состояниях света, а также анализ динамики и перепутанности атомных систем, взаимодействующих с неклассическими электромагнитными полями. Такие исследования включают разработку последовательной аналитической теории пространственных свойств ярких «сжатых» состояний света, позволяющую описывать пространственные корреляции большого числа фотонов друг с другом за рамками теории возмущений на основе введения новых независимых коллективных мод; описание на основе разработанной теории целого ряда экспериментов по корреляционным свойствам «сжатых» состояний и выявление возникающих новых физических эффектов; исследование динамики ионизации модельного ридберговского атома при его взаимодействии с неклассическим светом с учетом переходов в континуум, анализ возможности режима стабилизации и достижения высокой степени

перепутанности между атомной и полевой подсистемами, а также разработку методов создания стабильных и сильно перепутанных состояний.

**Актуальность** поставленной задачи обусловлена тем, что до сих пор не существует полной последовательной теории, позволяющей описывать пространственные свойства полей и множественные корреляции фотонов в состоянии яркого сжатого вакуума, а также вычислять их различные корреляционные характеристики. Однако, интерес к этим состояниям очень высок как с фундаментальной точки зрения, так и исходя из целого спектра актуальных и важных приложений для задач передачи и хранения квантовой информации, прецизионных квантовых измерений с уровнем шума ниже стандартного квантового предела, квантовой интерферометрии и метрологии. Кроме того, взаимодействие таких неклассических полей с атомными системами также является малоисследованной задачей и имеет большое значение для разработки протоколов передачи квантовой информации, формирования атомных квантовых “битов” с требуемым когерентным заселением уровней и контролируемой степенью перепутанности.

**Научная новизна** проведенных исследований определяется следующими положениями:

1. Впервые разработана последовательная аналитическая теория для описания пространственных свойств и множественных корреляций фотонов в ярких «сжатых» состояниях света, генерируемых в процессе параметрического рассеяния света с интенсивной накачкой или четырехволнового смешения.

2. На основе разработанной теории впервые продемонстрировано изменение пространственных корреляционных свойств «сжатого вакуума» с ростом коэффициента параметрического усиления и получено объяснение наблюдаемых эффектов в терминах новых введенных независимых пространственных мод.

3. На основе разработанного теоретического подхода проведено описание ряда экспериментов по анализу пространственных корреляций в

ярком «сжатом вакууме», продемонстрировано хорошее согласие с экспериментальными данными и обнаружены новые физические эффекты: впервые показана возможность создания пространственно одномодового источника неклассического «сжатого» света в схеме нелинейного усиления с двумя кристаллами; впервые продемонстрировано гигантское усиление нелинейного сигнала на определенной частоте в направлении «сноса» за счет эффектов анизотропии.

4. Впервые исследована динамика ионизации ридберговского атома при его взаимодействии с неклассическим светом в состоянии «сжатого вакуума» и обнаружен эффект стабилизации, а также высокая степень перепутанности между атомной и полевой подсистемами.

5. При взаимодействии ридберговского атома с одним полевым фотоном впервые продемонстрирована возможность создания стабильного и сильно перепутанного состояния.

6. Впервые разработаны методы по достижению максимальной перепутанности в системе «атом + квантовое поле».

#### **Научная и практическая значимость работы**

Полученные результаты имеют фундаментальную научную значимость с точки зрения разработки новых теоретических подходов к проблеме корреляций и перепутывания в составных квантовых системах, выявления новых свойств неклассических сжатых состояний, а также обнаружения новых эффектов, возникающих в процессе их взаимодействия с атомно-молекулярными системами. Полученные результаты имеют большое значение для целого ряда важных практических приложений, включая задачи передачи и хранения квантовой информации, прецизионные квантовые измерения с уровнем шума ниже стандартного квантового предела, квантовую интерферометрию и метрологию, разработку стандартов частоты, а также создание управляемых атомных квантовых «битов» с контролируемой степенью перепутанности.

**Достоверность** полученных результатов определяется совпадением найденных решений с известными асимптотическими пределами, прекрасным согласием целого ряда полученных результатов с имеющимися экспериментальными данными, а также физической надежностью использованных аналитических подходов и эффективностью методов программной реализации. Вышеперечисленное позволяет считать все полученные результаты полностью обоснованными и достоверными.

**Личный вклад автора** в работы, вошедшие в диссертацию, является определяющим в разработке теоретических моделей, аналитического и численного анализа, реализации численного решения и интерпретации полученных результатов. Все изложенные в диссертационной работе теоретические результаты получены лично автором.

На защиту выносятся следующие **основные результаты и положения**:

1. Разработанная за рамками теории возмущений аналитическая теория для описания пространственных свойств и корреляций в ярких «сжатых» состояниях света, генерируемых в процессе параметрического рассеяния света или четырехволнового смешения с интенсивной накачкой.

2. Увеличение ширины пространственных корреляций между пучками сигнальных и холостых фотонов в ярком «сжатом вакууме» с ростом коэффициента параметрического усиления и физическое объяснение наблюдаемого эффекта в терминах независимых пространственных мод.

3. Методы создания пространственно одномодового источника неклассического «сжатого» света в схеме нелинейного усиления с двумя кристаллами, а также теоретическое описание свойств такого излучения.

4. Методы получения гигантского усиления нелинейного сигнала параметрического рассеяния, наблюдающегося на определенной частоте в направлении «сноса» за счет эффектов анизотропии.

5. Обнаруженный эффект стабилизации, а также высокая степень перепутанности между атомной и полевой подсистемами при



взаимодействии ридберговского атома с неклассическим полем в состоянии «сжатого вакуума».

6. Методы управления стабилизацией атомной системы и создание абсолютно стабильного атомного состояния с высокой степенью перепутанности при взаимодействии неклассического света с малым числом фотонов с ридберговским атомом.

7. Методы создания максимальной перепутанности в системе “ридберговский атом + квантовое поле”, а также восстановление полной информации о таком смешанном атомном состоянии посредством приложения последующего классического импульса.

### **Содержание диссертации.**

Диссертация состоит из трех глав. В первой главе представлен обзор литературы, описывающий современное состояние исследований по теме диссертации, и обосновывается актуальность диссертационной работы.

Вторая глава посвящена теоретическому исследованию пространственных свойств и корреляций в ярких сжатых состояниях света, генерируемых в процессе параметрического рассеяния света с высокоинтенсивной накачкой или четырехволнового смешения. В данной главе представлен разработанный теоретический подход, позволяющий описывать пространственные корреляции в ярком сжатом вакууме за рамками теории возмущений, рассмотрены случаи цилиндрической и декартовой системы координат. На основе представленной теории проведено исследование пространственных корреляций между сигнальным и холостым пучками фотонов в ярком сжатом вакууме, произведен анализ различных корреляционных характеристик, таких как вариация разности, корреляционная функция второго порядка по интенсивности, ковариация, параметр Шмидта и исследованы их зависимости от различных параметров, в том числе от коэффициента параметрического усиления. Также рассматривается возможность создания пространственно одномодового

источника яркого сжатого вакуума в схеме с двумя нелинейными кристаллами, разделенными воздушным промежутком, и анализируется пространственная структура, модовый состав нелинейного сигнала при различном удалении кристаллов друг от друга. Кроме того, во второй главе описывается процесс генерации высокоинтенсивных пучков-близнецов вдоль направления вектора Умова-Пойнтинга накачки в кристалле, а также в симметричном ему направлении согласно условию фазового синхронизма, возникающий за счет эффекта пространственного сноса в анизотропном кристалле.

В третьей главе исследуется взаимодействие неклассических полей в состоянии сжатого вакуума, а также поля, содержащего малое число фотонов, с модельными ридберговскими атомными системами с учетом процесса ионизации атома. Исследуются эффекты стабилизации атома и степень перепутанности атомной и полевой подсистем в условиях наличия или отсутствия нижележащего атомного уровня, показана возможность создания стабильного атомного состояния с высокой степенью перепутанности. Также разрабатываются методы восстановления информации о состоянии атомной системы, возникающей в процессе взаимодействия атома с одиночным фотоном, посредством приложения последующего классического поля.

**Апробация работы.** Результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на семинарах отдела микроэлектроники НИИЯФ МГУ, а также на семинарах лаборатории квантовой информации и квантовых оптических технологий кафедры квантовой электроники физического факультета МГУ и были представлены на 12 международных конференциях и симпозиумах:

1. П.Р.Шарапова. *Динамика модельной атомной системы в сильном неклассическом электромагнитном поле.* Материалы конференции «Ломоносов-2010», Физика, секция «Оптика», доклад 22, (2010)

2. P.R.Sharapova, O.V.Tikhonova *Dynamics and ionization suppression of a model atomic system in quantized electromagnetic field*. Abstracts of the International conference on coherent and nonlinear optics (ICONO), 23-27.08.2010, Kazan, Russia, report ITUP1.

3. P.R.Sharapova, O.V.Tikhonova *Interaction of an atom with a strong non-classical field*. XX Laser Phys. Workshop, 11-15.07.2011, Sarajevo, Seminar 2, talk 70

4. P.R.Sharapova, O.V.Tikhonova *Stabilization and entanglement of a model Rydberg atom in non-classical electromagnetic field*. XXI Laser Phys. Workshop, 23-27.07.2012, Calgary, Canada, Seminar 2, talk 2.15.4

5. P.R.Sharapova *Entangled states of quantum composite systems*. ICPS 2012, 04-09.08.2012, Utrecht, Netherlands p.26

6. P.R.Sharapova, O.V.Tikhonova *Stabilization and entanglement of a model Rydberg atom in non-classical electromagnetic field*. International Workshop on Atomic Physics, 26-30, November, 2012, Dresden, Germany, p.39.

7. P.R.Sharapova, O.V.Tikhonova. *Interference stabilization and entanglement of a model Rydberg atom in a quantum electromagnetic field*. Abstracts of the International conference on coherent and nonlinear optics (ICONO), Moscow, Russia, 2013, talk IFH2

8. P.R.Sharapova, O.V.Tikhonova. *Behaviour of a model Rydberg atom in classical and quantum electromagnetic fields alternating each other*. XXII Laser Phys. Workshop, 15-19.07.2013, Prague, Czech Republic, Seminar 2, talk 2.13.4

9. P.R. Sharapova, O.V. Tikhonova, A.M.Perez , M.V.Chekhova, G. Leuchs. *Theoretical description of spatial correlation in bright squeezed vacuum using Bloch-Messiah reduction*. Quantum 2014, 25-30.05.2014, Torino, Italy, talk P72

10. P.R. Sharapova, O.V. Tikhonova, A.M.Perez , M.V.Chekhova, G. Leuchs. *Theoretical description of spatial correlations arising in bright squeezed vacuum by means of Bloch-Messiah reduction and Schmidt modes formalism*.

XXIII Laser Phys. Workshop, 14-18.07.2014, Sofia, Bulgaria, Seminar 7, talk 7.2.1

11. Polina R. Sharapova, O. V. Tikhonova, Angela Marcela Perez Castaneda, Maria V. Chekhova, Gerd Leuchs. *Theoretical description of spatial multiphoton correlations in bright squeezed vacuum states of light*. .SPIE, 13-16.04.2015, Prague, Czech Republic, [9505-33]

12. Polina Sharapova, Olga Tikhonova, Angela Perez, Maria Chekhova and Gerd Leuchs, *The anisotropy effect and spatial walk-off in the bright squeezed vacuum states of light in terms of Schmidt modes*. 14 International Conference on Squeezed States and Uncertainty Relations, ICSSUR 2015, 29.06-03.07.2015, Gdansk, Poland

Основные результаты диссертации изложены в 7 статьях, опубликованных в ведущих российских и международных реферируемых научных журналах [1-7], и 12 тезисах докладов на международных конференциях и симпозиумах [8-19].

# Глава 1

## Литературный обзор

Важным направлением современных физических исследований является изучение свойств многокомпонентных (составных) квантовомеханических систем. Одним из фундаментальных и на первый взгляд парадоксальных свойств таких составных систем, берущим свое начало от знаменитого парадокса Эйнштейна-Подольского-Розена [20], является перепутанность, возникающая между подсистемами рассматриваемой составной системы. Перепутанность обнаруживает принципиальное различие между квантовыми и классическими объектами и является неотъемлемой характеристикой квантового мира. С точки зрения формализма волновой функции запутанность есть не что иное, как невозможность факторизации волновой функции системы на произведение волновых функций подсистем, что говорит о непосредственной взаимосвязи таких подсистем вне зависимости от их положения в пространстве и позволяет посредством измерений свойств одной подсистемы получить информацию о состоянии другой подсистемы. Понимание запутанности как важного свойства квантовых объектов и дальнейшее ее изучение обозначило новые, стремительно эволюционирующие области современной науки, такие как квантовая криптография, квантовая телепортация, квантовая томография, алгоритмы квантовой информации, квантовые стандарты частоты и т. д., а также открыло широкие горизонты их развития. Для количественной характеристики степени перепутанности системы на сегодняшний день существуют различные меры и параметры, такие как корреляционные функции [21, 22], параметр Шмидта [23, 24], энтропия [25], согласованность (concurrency) [26] и другие, используемые в зависимости от удобства их применения в контексте определенной задачи.

В последнее время благодаря успешной экспериментальной генерации различных неклассических полей, таких как, например, бифотонные пары

[27-48], поля в состоянии сжатого вакуума [49-54], однофотонные состояния [75-83] и т. д., а также повышению эффективности взаимодействия единичных атомов с единичными фотонами [73, 74], стало возможным наблюдение перепутанности не только между объектами одной природы (перепутывание отдельных атомов и ионов, перепутывание фотонов), но и между объектами различной природы: перепутывание атомной и полевой подсистем при взаимодействии атома с квантовым полем.

Наиболее просто запутанные объекты можно получить при генерации бифотонных пар [27, 28] в результате параметрического рассеяния света на кристалле с квадратичной нелинейностью [29-32], а также в процессе четырехволнового смешения [33, 34] при малом коэффициенте параметрического усиления (гейне), то есть при малой интенсивности накачки. В процессе параметрического рассеяния фотон накачки согласно условию фазового синхронизма распадается на два фотона параметрического излучения, условно называемые сигнальным и холостым фотонами [35]. В зависимости от выбранного режима фазового синхронизма бифотонные пары могут быть запутаны по пространственным переменным [36, 37], частотным переменным [38], а также по поляризации [39, 40], в последнем случае управлять фотонами параметрики наиболее просто, например, при помощи линейных оптических элементов, таких как зеркала и поляризационные пластины [40]. Бифотонные пары являются весьма перспективными и удобными объектами для построения протоколов квантовой информации, как в дискретном базисе (кубиты, кутриты, кукварты) [41-45], так и в непрерывном базисе частотных/угловых переменных [46-48].

Однако в последнее время все чаще внимание исследователей привлекают сжатые [49-51] и особенно яркие сжатые [52] состояния света как неклассические макроскопические поля с большим числом фотонов на моду и, как следствие, обладающие более богатыми корреляциями по сравнению с корреляциями, возникающими в двухфотонном свете. Такие поля также генерируются в процессе параметрического рассеяния света на

кристалле с квадратичной нелинейностью или в процессе четырехволнового смешения, как и бифотонные пары, но при высоком значении коэффициента параметрического усиления (гейна), то есть в случае высокоинтенсивной накачки. В силу интенсивной накачки вероятность рождения числа фотонов большего двух в таких процессах становится отличной от нуля, как следствие, появляется поле с широким распределением по числу фотонов и высоким значением среднего числа фотонов на моду  $\langle N \rangle$ . Совершенствование экспериментальных методов позволяет на сегодняшний день достигать высоких значений коэффициента параметрического усиления: порядка  $G = 16$ , что приводит к колоссально высокому числу фотонов на моду  $\langle N \rangle \sim 10^{13}$  и генерации ярких сжатых состояний света. Таким образом, яркие сжатые состояния света характеризуются высокой степенью квантовой запутанности [53], а корреляции фотонов в таких полях представляют более богатую область для исследований и большие возможности для квантовой криптографии в сравнение с бифотонными парами. Кроме того, сжатые состояния обладают только квантовым шумом (без классической компоненты) и характеризуются уменьшением уровня шума и квантовых ошибок для одной из квадратур и более того, подавлением шума ниже стандартного квантового предела [54], что также имеет большое значение для передачи и хранения квантовой информации. Еще одним не менее важным свойством сжатых состояний является их многомодовая структура, открывающая новые возможности для кодирования квантовой информации. Указанные свойства ярких сжатых состояний делают их весьма привлекательными для различных приложений, таких как квантовая томография [55,56], квантовые измерения [57,58], квантовая оптомеханика [59], детектирование гравитационных волн [60].

На сегодняшний день бифотонные пары, поля в состоянии сжатого вакуума и особенно яркого сжатого вакуума получены различными экспериментальными группами [27-32, 49-53]. Их свойства широко исследованы и изучены экспериментально, поэтому возникает вопрос

теоретического описания таких квантовых объектов. В случае бифотонных пар, возникающих в условиях слабой накачки кристалла, наиболее простыми и удобными являются модели описания, базирующиеся на методах теории возмущений, что оправдано низкими значениями коэффициента параметрического усиления. В настоящий момент имеется достаточно большое количество работ, представляющих теоретическое описание свойств и корреляционных характеристик бифотонных пар [36-38, 45-47].

В противоположность режиму низкого коэффициента параметрического усиления разработка самосогласованного теоретического подхода для режима сильной накачки представляет собой достаточно сложную задачу вследствие ненулевой вероятности заселения скоррелированных фоковских компонент с высокими номерами. Таким образом, для сжатых и в особенности ярких сжатых состояний света в силу их широкого распределения по числу фотонов и огромного среднего числа фотонов в моде методы теории возмущений не применимы, а значит, необходимо искать новые непertурбативные методы, позволяющие описывать сжатые состояния и предсказывать новые эффекты, возникающие в различных экспериментальных схемах, использующих сжатый свет.

На сегодняшний день имеется ряд теоретических работ, посвященных исследованию корреляционных свойств параметрического излучения в случае высокого коэффициента параметрического усиления [61-67], однако большая их часть посвящена анализу частотных характеристик сжатых состояний. Предлагаемые методы исследований базируются на концепции широкополосных частотных мод или обобщении классических уравнений распространения излучения на квантовый случай. В условиях реальных экспериментов такие подходы приводят к необходимости решения систем интегро-дифференциальных уравнений для операторов рождения/уничтожения.

В частности, в работах [61-63] представлена полуклассическая модель: рассмотрено решение классического волнового уравнения с



последующей заменой векторного потенциала операторами рождения/уничтожения и нахождением соотношений между операторами на входе и выходе из кристалла. В приближении монохроматической накачки задача решена аналитически, однако в случае накачки конечной ширины решение сводится к системе интегро-дифференциальных уравнений и находится численно.

Поскольку в случае ярких состояний более удобным представляется находить не вектор состояния поля, а определять временные зависимости физических операторов и вычислять наблюдаемые в представлении Гайзберга, в альтернативном подходе [64,65] для описания сжатого вакуума использовалась картина Гайзенберга, но в пространстве Фурье образов операторов рождения/уничтожения. При этом временная зависимость операторов заменялась зависимостью от продольной координаты, что само по себе должно быть строго обосновано. Кроме того, аналитическое решение задачи представлено лишь для спектра накачки много меньшего спектра параметрики, в общем случае задача решается численно.

Существуют также подходы [66,67], описывающие корреляции в ярком сжатом вакууме в терминах, так называемых, широкополосных коллективных мод. В таком случае формализм мод Шмидта, использованный для описания многомодовой структуры двухфотонного света [68], заменяется схожей процедурой, называемой редукцией Блоха-Мессаи [69]. Однако результаты, полученные в этих работах, затрагивают также только частотную область и основаны на использовании оператора эволюции, что сводит решение задачи к численному решению системы интегро-дифференциальных уравнений и также в полной мере не проясняет механизма наблюдаемых явлений.

Также стоит отметить, что процедура численного решения операторных интегро-дифференциальных уравнений представляет собой отдельную и довольно непростую задачу, требующую точного определения

взаимосвязи фотонных операторов на входе и выходе из кристалла, что приводит к трудностям в случае численной реализации.

Таким образом, имеющиеся на данный момент теоретические методы описания сжатых состояний представляют собой либо упрощенное аналитическое описание в условиях целого ряда приближений, либо численное моделирование процессов. Поэтому возникает необходимость построения последовательной, по возможности аналитической теории, описывающей свойства яркого сжатого вакуума и позволяющей понять физику явлений, происходящих в таких состояниях света, а также предсказывать новые эффекты в экспериментальных схемах, использующих сжатый свет.

Однако, как отмечалось, квантовые корреляции могут наблюдаться не только между объектами одинаковой природы (скоррелированные фотоны в бифотонных парах и в поле в состоянии сжатого вакуума, скоррелированные спины двух частиц), но также между объектами совершенно различной природы в неоднородных составных системах (например, перепутывание между атомом и квантовым полем) [70-72]. Такой тип запутанности привлекает к себе в последнее время все больший интерес в связи с успешной экспериментальной генерацией различных неклассических полей, а также повышением эффективности атомно – полевого взаимодействия [73, 74]. Помимо бифотонных пар и поля в состоянии сжатого вакуума яркими представителями квантовых полей являются однофотонные состояния. В качестве однофотонных источников могут служить, например, квантовые точки [75 - 80] или захваченные атомы (ионы). [81-83]

В общем случае квантовая точка представляет собой достаточно малый фрагмент проводника или полупроводника, в котором электроны ограничены по всем трем пространственным направлениям. Причем размер квантовой точки должен быть настолько мал, чтобы электронный спектр представлял собой набор дискретных уровней с областями запрещенных состояний. Вследствие этого электроны, содержащиеся в квантовой точке,

ведут себя в такой структуре как в трехмерной потенциальной яме, поэтому энергетический спектр квантовой точки непосредственно зависит от ее размера, что приводит к возможности управления спектром частот излучаемых квантовой точкой фотонов посредством изменения ее размеров. Квантовые точки, иногда называемые “искусственными атомами”, достаточно привлекательны из-за ряда присущих им свойств, а именно: относительная стабильность, сравнительно узкая ширина спектральных линий, значительная скорость радиационного распада, кроме того, квантовые точки могут быть легко интегрированы в более масштабные структуры, такие как микрополости, для увеличения эффективности образования фотонов. Таким образом, однофотонное состояние поля может быть получено путем резонансного поглощения кванта света квантовой точкой от внешнего источника с последующим его излучением и переходом квантовой точки из возбужденного состояния в основное; при этом вероятность двухфотонной генерации крайне мала.

Еще один способ генерации и удержания однофотонных состояний может быть реализован при помощи, так называемых, захваченных атомов [81, 82] или ионов [83]. Так, ион (атом) помещается в однородную ловушку, находящуюся в вакуумной камере. Затем происходит возбуждение иона посредством повторяющихся ультракоротких лазерных импульсов в течение интервала измерения с последующим спонтанным излучением фотона в течение интервала “охлаждения”. Измерения величины автокорреляционной функции  $g^{(2)}(\tau)$ , где  $\tau$  - время фиксируемой задержки двух фотонов на двух детекторах, при этом показывают отсутствие пика при  $\tau = 0$ , то есть только один фотон испускается после каждого возбуждающего импульса.

Хотя перепутывание атомных состояний с единичными фотонами было исследовано в ряде работ [84, 85], представляет большой интерес возможность перепутанности атомной и полевой подсистем в более общих случаях, когда поле характеризуется широким распределением по числу фотонов или атомная система подвергается ионизации под действием

фотонного поля. При этом учет непрерывного спектра атома позволяет рассматривать реальные системы, что особенно актуально для экспериментов с возбужденными состояниями щелочных металлов, кроме того, в данном случае не возникает жестких резонансных требований на частоту фотонов.

Квантовые корреляции, возникающие в процессе взаимодействия атома с квантовым полем также широко используются в алгоритмах квантовой информации, улучшении квантовых стандартов частоты, квантовой томографии и квантовой телепортации [86-89], так как взаимодействие неклассических полей с атомными системами позволяет увеличить количество степеней свободы составной системы, что приводит к большей степени квантовой запутанности. Более того, наличие одновременно и полевой, и атомной степеней свободы может привести к более яркому проявлению эффектов, наблюдаемых ранее при взаимодействии атомов с классическим электромагнитным полем.

К примеру, в силу того, что поле в состоянии сжатого вакуума обладает широким распределением по числу фотонов, вероятность процессов многофотонности в таком поле достаточно велика, а значит, многие процессы, наблюдаемые в сильном классическом поле, в поле в состоянии сжатого вакуума будут протекать с большей вероятностью. К таким процессам можно отнести, например, генерацию гармоник в атомах [90]. Кроме того, возникает важный вопрос о возможности эффекта стабилизации атома в квантовом поле. Первоначально такой эффект был обнаружен для классического света и заключается в подавлении вероятности ионизации атома с ростом интенсивности внешнего электромагнитного поля выше некоторого критического значения [91- 94]. Стабилизация атома относительно его ионизации играет немаловажную роль в процессах передачи квантовой информации, так как алгоритмы квантовой информации предполагают наличие стабильных, нераспадающихся систем, в связи с чем возникает необходимость изучения явления стабилизации при взаимодействии атома с квантовыми полями и его теоретического описания.

В настоящее время данная проблема крайне мало изучена, и трудность здесь, в первую очередь, заключается в необходимости учета как атомных, так и полевых степеней свободы, а также в неприменимости методов теории возмущений [91]. Дело в том, что в случае высокого коэффициента связи атомно-полевого взаимодействия, реализуемого, например, в резонаторе, при взаимодействии атома даже с одним фотоном, а тем более с полем в состоянии сжатого вакуума, где среднее число фотонов на моду крайне велико (порядка  $\langle N \rangle \sim 10^{13}$ ), необходимо рассматривать новый объект, так называемый, “атом, одетый квантовым полем”, свойства которого принципиально отличаются от свойств невозмущенного атома. Такая система (“атом + квантовое поле”) характеризуется новым энергетическим спектром - квазиэнергетическими или “одетыми состояниями”, которые зависят как от атомных, так и от полевых координат в отличие от случая классических полей.

При взаимодействии атома с классическим полем “одетые состояния” были изучены [94,98], и было показано, что благодаря формированию “одетой системы” в сильных классических световых полях возможно наблюдение эффекта стабилизации. При этом возникает вопрос о возможности стабилизации ридберговского атома квантовым полем, а также влиянии полевой степени свободы на динамику атомной системы и механизмы стабилизации.

Физический механизм интерференционной стабилизации заключается в когерентном перезаселении ридберговских уровней в процессе ионизации за счет переходов рамановского типа. Указанное перезаселение может происходить посредством виртуальных переходов через континуум ( $\Lambda$  - тип) [91, 95, 96] или через нижележащее состояние ( $V$  - тип) [96-98], причем такие переходы становятся эффективными лишь в достаточно сильном поле. При этом когерентное перезаселение близко расположенных ридберговских уровней переходами  $\Lambda$  и  $V$  - типа приводит к тому, что амплитуды населенности ридберговских уровней оказываются сфазированными таким

образом, что последующие переходы с этих уровней в континуум, интерферируя, частично гасят друг друга и стабилизируют атом, уменьшая скорость его ионизации в сильном поле. В слабых полях рамановские переходы между уровнями с различной энергией запрещены по закону сохранения энергии. Такие переходы становятся возможными лишь в случае, когда ридберговские уровни имеют соответствующее ионизационное уширение, перекрывающее расстояние по энергии между соседними ридберговскими состояниями. При этом происходит перекрытие соседних близко расположенных уровней, и механизм интерференционной стабилизации становится возможным, поэтому возникновение интерференционной стабилизации в сильном классическом поле имеет место только при интенсивностях выше некоторого порогового значения.

Простейшим примером, на котором можно продемонстрировать механизм интерференционной стабилизации, является модель ридберговского атома, включающая два дискретных ридберговских уровня  $E_1, E_2$  и континуум. При взаимодействии такой модельной системы с сильным классическим электромагнитным полем в энергетическом спектре возникают две квазиэнергии:

$$\gamma_{\pm} = \frac{E_1 + E_2}{2} - i\frac{\Gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2},$$

где  $\Delta = E_2 - E_1$  – расстояние между дискретными уровнями,  $\Gamma$  – скорость ионизации, рассчитанная по “Золотому Правилу Ферми”. Таким образом, квазиэнергии в общем случае комплексны, при этом за распад квазиэнергетического состояния отвечает мнимая часть квазиэнергии, то есть скорость перехода в континуум непосредственно зависит от соотношения между начальными параметрами  $\Delta$  и  $\Gamma$ , поэтому различают два режима: режим слабого ( $\Delta \gg \Gamma$ ) и режим сильного поля ( $\Delta \ll \Gamma$ ). В пределе слабого поля уровни распадаются одинаково, скорость распада зависит от  $\Gamma$ . В случае сильного поля ширины двух квазиэнергетических уровней существенно различны  $Im[\gamma_-] \approx -\Gamma$  и  $Im[\gamma_+] \approx -\frac{\Delta^2}{4\Gamma}$ . Малое значение ширины уровня  $\gamma_+$

в пределе сильного поля соответствует эффекту интерференционной стабилизации [91, 95, 96]. Таким образом, двум квазиэнергиям  $\gamma_+, \gamma_-$  отвечают две квазиэнергетические волновые функции  $\varphi_+$  - стабильное состояние и  $\varphi_-$  - быстро распадающееся состояние. В случае классического поля [91, 95] стабилизация проявляется в том, что с ростом лазерной интенсивности все большая доля атомной заселенности оказывается “захваченной” в более устойчивое по отношению к ионизации квазиэнергетическое состояние. Поэтому в фиксированный момент времени наблюдается все большая вероятность обнаружить атом в связанном состоянии с увеличением лазерной интенсивности.

В случае добавления к указанной выше схеме резонансного нижележащего уровня образуется простейшая схема для наблюдения V – стабилизации. Приближенное решение такой задачи было найдено в работах [96-98]. Для V – схемы характерно образование трех квазиэнергетических состояний, соответствующих трем квазиэнергиям; причем при определенной подборке начальных параметров (выбор определенной величины отстройки от резонанса) можно показать, что одна из квазиэнергий фактически не имеет мнимой части, то есть существует не распадающийся уровень. Последнее свидетельствует о том, что стабилизация в случае V – схемы для сильного классического поля наблюдается лучше, чем для  $\Lambda$  – схемы. Таким образом, эффект стабилизации ранее рассматривался лишь в классическом поле. Поэтому возникает важная и малоисследованная на сегодняшний день задача – изучение динамики ионизации и возможности стабилизации ридберговского атома в неклассическом поле. Более того, возникает новый (по сравнению с полуклассическим рассмотрением) аспект исследования – анализ перепутывания в системе “атом + квантовое поле”.

Отметим, что среди квантовых полей существует аналог классического света: когерентное состояние с пуассоновским распределением коэффициентов  $|\alpha_k|^2 = \frac{\langle N \rangle^k e^{-\langle N \rangle}}{k!}$  при больших значениях среднего числа

фотонов  $\langle N \rangle \gg 1$  описывает классический свет. Для такого распределения характерна достаточно узкая локализация распределения около среднего числа фотонов, поэтому такое поле может оказаться «сильным» или «слабым» по своему воздействию на атом, исходя из значения  $\langle N \rangle$ . Однако поле в состоянии сжатого вакуума нельзя отнести однозначно к слабому или сильному полю, исходя из среднего числа фотонов, по причине значительного вклада вакуумного состояния и, вместе с тем, фоковских состояний с большим (при этом четным) числом фотонов (в силу широкого распределения по числу фотонов такого поля), что ведет к необходимости учитывать фоковские компоненты высоких номеров и рассматривать области сильного и слабого поля одновременно. Основные особенности сжатых состояний были рассмотрены в [99]. Хотя специфика взаимодействия атомных систем с неклассическими полями обсуждалась в [90, 100, 101], и отмечалось, что сжатые состояния обуславливают увеличение эффективности процессов большого порядка многофотонности, однако вопрос о возможности стабилизации атомной системы в таком неклассическом свете не обсуждался и до сих пор остается открытым.

Не менее интересной представляется задача исследования ионизационной динамики атомной системы, взаимодействующей с полем, включающим всего один фотон. Данная проблема привлекательна по двум основным причинам: во-первых, однофотонное состояние является неклассическим, а значит, возможен анализ эффектов квантового поля; во-вторых, в силу наличия только одного фотона, решение задачи существенно упрощается, и становится возможным получение аналитического решения, в том числе и для случая ионизации атомных  $\Lambda$  и  $V$  – систем. Особую актуальность данное направление приобретает в связи с тем, что развитие экспериментальной техники на сегодняшний день позволяет осуществлять взаимодействие одиночных фотонов с атомами с высокой эффективностью [73,74]. То есть можно говорить о сильном квантовом поле, представленном только одним фотоном.



Таким образом, исследование динамики ионизации и обнаружение режимов интерференционной стабилизации ридберговского атома, взаимодействующего с различными квантовыми полями, такими как бифотонные пары, однофотонные состояния, а также поля в состоянии сжатого вакуума, представляет собой нерешенную и весьма актуальную на сегодняшний день проблему. Корреляции, возникающие при этом между атомной и полевой подсистемами, представляют широкий интерес для различных квантовых приложений и требуют детального изучения. Кроме того, возникает вопрос об экспериментальном измерении перепутанности в системе “атом + квантовое поле”, а также о создании максимально перепутанных состояний в такой системе и о возможности контроля атомной динамики и получении информации об атомной подсистеме.

## Глава 2

# Пространственные свойства и корреляции яркого сжатого вакуума

В данной главе исследуются пространственные свойства и корреляции ярких сжатых неклассических состояниях света, генерируемых в процессе параметрического рассеяния света или четырехволнового смешения в случае интенсивной накачки. Теоретический анализ проводится на основе разработанного теоретического подхода [5], базирующегося на разложении Шмидта амплитуды бифотона, последующем введении новых интегральных операторов рождения/уничтожения фотонов в модах Шмидта и диагонализации исходного гамильтониана в терминах новых введенных фотонных операторов. Рассматриваемый подход позволяет получить конечные аналитические выражения как для операторов Шмидта, так и для плосковолновых операторов на выходе из нелинейного кристалла, на основе которых могут быть вычислены различные пространственные и корреляционные характеристики сжатого вакуума. Предлагаемый подход позволяет описывать различные экспериментальные схемы и предсказывать новые эффекты, возникающие в них, например, такие как генерация высокоинтенсивного излучения в направлении угла сноса, а также сопряженном ему направлении [7], выделение одной пространственной моды в нелинейном интерферометре с двумя разделенными нелинейными кристаллами [4], уменьшение числа мод при увеличении параметрического коэффициента усиления (гейна) [5,6] и др. Все полученные в данной главе теоретические результаты сопоставлены с данными экспериментальных исследований, проводимых по изучению пространственных корреляционных свойств ярких сжатых состояний в группе профессора М. В. Чеховой (Институт Макса Планка, Эрланген, Германия), и находятся с ними в хорошем согласии.

## 2.1. Теоретический подход, разработанный для описания пространственных свойств яркого сжатого вакуума

Гамильтониан параметрического рассеяния света на кристалле с квадратичной нелинейностью, отражающий рождение сигнального и холостого поля из поля накачки, а также обратный процесс, в общем виде может быть представлен следующим образом:

$$H = - \int d^3\mathbf{r} \chi^{(2)}(\mathbf{r}) \left( E_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) E_s^{(-)}(\mathbf{r}, t) E_i^{(-)}(\mathbf{r}, t) + H. c. \right), \quad (2.1)$$

где  $\chi^{(2)}$  – квадратичная нелинейность среды, индексы  $s, i, p$  обозначают сигнальное, холостое излучение и излучение накачки соответственно, индекс (+) соответствует поглощению фотона, индекс (–) – его излучению. Посредством замены квадратичной нелинейности на кубическую и учета дважды поля накачки можно получить гамильтониан четырехволнового смешения, для которого предлагаемая теоретическая модель также справедлива.

Учитывая квантование макроскопического электромагнитного поля в среде:

$$E_s(\mathbf{r}, t) = E_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) + E_s^{(-)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_k \mathbf{e}_k \bar{c}_k a_k e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} + h. c., \quad (2.2)$$

где нормировочная константа  $\bar{c}_k = c_k \xi_k = \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V}} \xi_k = \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V} * \frac{u_k}{c n_k \cos \rho_k}} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_k v_k}{V c n_k}}$ ,  $\mathbf{e}_k$  – единичный вектор, указывающий направление поляризации осцилляторов,  $\rho_k$  – обобщенный угол анизотропии,  $u_k$  – групповая скорость,  $v_k$  – фазовая скорость,  $\omega_k$  – частота моды,  $V$  – объем взаимодействия,  $c$  – скорость света, гамильтониан можно переписать в виде:

$$H = i \int d^3\mathbf{r} \chi^{(2)}(\mathbf{r}) \sum_{k_1 k_2 k_3} \mathbf{e}_{k_1} \mathbf{e}_{k_2} \mathbf{e}_{k_3} \bar{c}_{k_1} \bar{c}_{k_2} \bar{c}_{k_3} a_{k_1}^+ a_{k_2}^+ a_{k_3} \times e^{-i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3)\mathbf{r}} e^{i(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3)t} + H. c. \quad (2.3)$$

Далее будем рассматривать классическую накачку и представлять ее как сумму положительно и отрицательно частотных частей:

$$\begin{aligned}
E_p(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} E_p(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega = \\
&= \int_0^{+\infty} E_p(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega + \int_{-\infty}^0 E_p(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega = \\
&= E_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) + E_p^{(-)}(\mathbf{r}, t), \tag{2.4}
\end{aligned}$$

где  $E_p^{(+)}(\mathbf{r}, t)$  соответствует “положительно частотной” части накачки,  $E_p^{(-)}(\mathbf{r}, t)$  – “отрицательно частотной” части накачки,  $E_p^{(-)}(\mathbf{r}, t) = [E_p^{(+)}(\mathbf{r}, t)]^+$ . Для проведения аналогии с квантовым полем положительно и отрицательно частотные части накачки будем записывать в виде:

$$E_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i E_0(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k}_p \mathbf{r} - \omega_p t)}, E_p^{(-)}(\mathbf{r}, t) = -i E_0^*(\mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{k}_p \mathbf{r} - \omega_p t)}. \tag{2.5}$$

Не ограничивая общности, будем считать, что для сигнального и холостого фотонов нормировочные коэффициенты одинаковы  $\bar{c}_{k_s} \approx \bar{c}_{k_i} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_s v_s}{V c n_s}}$ , накачка классическая с гауссовым пространственным профилем  $E_0(x, y) = \varepsilon_0 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$ , где  $\varepsilon_0$  – амплитуда напряженности поля накачки,  $2\sqrt{\ln 2} \sigma$  – ширина на половине высоты распределения накачки по интенсивности. Также будем рассматривать только пространственный спектр, применив по частоте условие:  $\omega_s + \omega_i = \omega_p$ , тогда гамильтониан явным образом не будет зависеть от времени:

$$\begin{aligned}
H &= i\chi^{(2)} \int d^3\mathbf{r} \int dk_{sx} dk_{sy} dk_{ix} dk_{iy} \frac{2\pi\hbar\omega_s v_s}{V c n_s} \varepsilon_0 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} a_s^+ a_i^+ e^{-i(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_p) \mathbf{r}} \\
&+ H. c. \tag{2.6}
\end{aligned}$$

Интегрирование по поперечным направлениям будем производить в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ , по продольному направлению в самом простом

случае (без учета анизотропии) интегрирование производится на длине кристалла  $L$ :

$$H = i\chi^{(2)} \frac{2\pi\hbar\omega_s v_s}{Vc n_s} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_0^L dz e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} e^{-i(k_{sx}+k_{ix})x} \\ \times e^{-i(k_{sy}+k_{iy})y} e^{-i(k_{sz}+k_{iz}-k_p)z} a_s^\dagger a_i^\dagger + H. c. \quad (2.7)$$

После интегрирования по пространственным переменным гамильтониан приобретает вид:

$$H = i\hbar \Gamma \int dk_{sx} dk_{sy} dk_{ix} dk_{iy} e^{-\frac{\sigma^2(k_{sx}+k_{ix})^2}{2}} e^{-\frac{\sigma^2(k_{sy}+k_{iy})^2}{2}} \\ \times \text{sinc}\left(\frac{L(k_{sz} + k_{iz} - k_p)}{4 k_p}\right) \times \exp\left\{i \frac{L(k_{sz} + k_{iz} - k_p)}{4 k_p}\right\} a_s^\dagger a_i^\dagger + H. c., \quad (2.8)$$

где константа  $\Gamma$  – коэффициент параметрического усиления (параметрический гейн):

$$\Gamma = \chi^{(2)} \frac{2\pi\omega_s v_s}{Vc n_s} \varepsilon_0 2\pi \sigma^2 L \quad (2.9)$$

Таким образом, гамильтониан в общем виде зависит от четырех переменных – составляющих поперечных волновых векторов сигнального и холостого фотонов и может быть переписан в следующем виде:

$$H = i\hbar\Gamma \int dk_{sx} dk_{sy} dk_{ix} dk_{iy} F(k_{sx}, k_{sy}, k_{ix}, k_{iy}) a_{\mathbf{q}_s}^\dagger a_{\mathbf{q}_i}^\dagger + H. c., \quad (2.10)$$

где  $F(k_{sx}, k_{sy}, k_{ix}, k_{iy})$  – амплитуда бифотона, определяемая профилем накачки, количеством и расположением кристаллов, наличием диспергирующей среды, ее свойствами,  $a_{\mathbf{q}_s}^\dagger$  – фотонные операторы рождения в соответствующей плосковолновой моде,  $\mathbf{q}_{s,i}$  – поперечные волновые векторы сигнального и холостого фотонов.

Предлагаемый далее подход предполагает использование разложения Шмидта амплитуды бифотона, однако при учете полной размерности задачи разложение Шмидта представляет собой определенную проблему: амплитуда бифотона в общем виде является функцией четырех переменных. Указанная проблема может быть решена в случае цилиндрической симметрии задачи в

цилиндрических координатах или в декартовых координатах в приближении “двух гауссов” (Double Gauss approximation), когда двумерная амплитуда факторизуется на произведение одномерных амплитуд гауссового вида.

### 2.1.1. Цилиндрическая система координат.

В цилиндрической системе координат каждый поперечный волновой вектор задается модулем  $q_{s,i}$  и азимутальным углом  $\varphi_{s,i}$ . Так, например, в самом простом случае одного кристалла и режиме коллинеарного вырожденного синхронизма ( $\omega_s = \omega_i = \frac{\omega_p}{2}$ ) типа-I без учета анизотропии амплитуда бифотона после интегрирования по пространственным переменным имеет вид:

$$F(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) = C \exp\left\{-\frac{\sigma^2(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i)^2}{2}\right\} \text{sinc}\left(\frac{L(\mathbf{q}_s - \mathbf{q}_i)^2}{4k_p}\right) \exp\left\{i\frac{L(\mathbf{q}_s - \mathbf{q}_i)^2}{4k_p}\right\}, \quad (2.11)$$

где для продольных составляющих сигнального, холостого фотонов и фотона накачки учтено разложение:  $k_{rz} = \sqrt{k_r^2 - k_{rx}^2 - k_{ry}^2} \approx k_r\left(1 - \frac{k_{rx}^2 + k_{ry}^2}{2k_r^2}\right)$ , индекс  $r$  пробегает значения  $r = s, i, p$ , также учтены условия для поперечных составляющих волнового вектора накачки:  $k_{px} = k_{sx} + k_{ix}$ ,  $k_{py} = k_{sy} + k_{iy}$ ,  $C$  – нормировочная константа. Таким образом, в данном случае гамильтониан может быть переписан в следующем общем виде:

$$H = i\hbar\Gamma \int d\mathbf{q}_s d\mathbf{q}_i F(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) a_{\mathbf{q}_s}^\dagger a_{\mathbf{q}_i}^\dagger + H. c., \quad (2.12)$$

где амплитуда бифотона  $F(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i)$  может быть представлена как разложение Фурье в силу периодичности по разности  $(\varphi_s - \varphi_i)$ , так как  $\mathbf{q}_s \mathbf{q}_i = q_s q_i \cos(\varphi_s - \varphi_i)$  [102]:

$$F(q_s, q_i, \varphi_s - \varphi_i) = \sum_n \chi_n(q_s, q_i) e^{in(\varphi_s - \varphi_i)}, \quad (2.13)$$

функция  $\chi_n(q_s, q_i)$ , в свою очередь, может быть найдена при помощи обратного Фурье преобразования. Такое поведение амплитуды бифотона является прямым следствием азимутальной симметрии параметрического

рассеяния в используемой экспериментальной схеме и ведет к инвариантности интенсивности излучения относительно азимутального угла. В таком случае одномерное разложение Шмидта функции  $\chi_n(q_s, q_i)$  имеет вид:

$$\chi_n(q_s, q_i) = \sum_m \sqrt{\lambda_{mn}} \frac{u_{mn}(q_s)}{\sqrt{q_s}} \frac{v_{mn}(q_i)}{\sqrt{q_i}}, \quad (2.14)$$

где функции  $u_{mn}(q_s)$  и  $v_{mn}(q_i)$  удовлетворяют следующим условиям нормировки:

$$\int_0^\infty dq_s u_{mn}(q_s) u_{kn}^*(q_s) = \int_0^\infty dq_i v_{mn}(q_i) v_{kn}^*(q_i) = \delta_{mk}. \quad (2.15)$$

Разложение (2.14) позволяет записать амплитуду бифотона в следующем виде:

$$F(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) = \sum_{m,n} \sqrt{\lambda_{mn}} \frac{u_{mn}(q_s)}{\sqrt{q_s}} \frac{v_{mn}(q_i)}{\sqrt{q_i}} e^{in(\varphi_s - \varphi_i)}. \quad (2.16)$$

Используя выражение (2.16), можно переписать гамильтониан (2.12) в терминах операторов рождения/уничтожения фотонов в новых коллективных независимых пространственных модах, так называемых, модах Шмидта, каждая из которых характеризуется определенным пространственным распределением:

$$H = i\hbar\Gamma \sum_{m,n} \sqrt{\lambda_{mn}} (A_{mn}^\dagger B_{mn}^\dagger - A_{mn} B_{mn}), \quad (2.17)$$

где интегральные операторы имеют вид:

$$\begin{aligned} A_{mn}^\dagger &= \int d\mathbf{q}_s \frac{u_{mn}(q_s)}{\sqrt{q_s}} e^{in\varphi_s} a_{\mathbf{q}_s}^\dagger \\ B_{mn}^\dagger &= \int d\mathbf{q}_i \frac{v_{mn}(q_i)}{\sqrt{q_i}} e^{-in\varphi_i} a_{\mathbf{q}_i}^\dagger, \end{aligned} \quad (2.18)$$

здесь  $d\mathbf{q} = q dq d\varphi$ .

Описанная процедура есть не что иное, как обобщенная редукция Блоха-Мессаи, которая в частотной области позволяет ввести новые коллективные фотонные операторы и коллективные моды, иногда называемые широкополосными модами.

Переходя к новым коллективным операторам, становится возможным провести диагонализацию исходного гамильтониана (2.17) таким образом, что входящие в него моды Шмидта становятся связаны друг с другом исключительно попарно. При этом новые операторы отвечают стандартным коммутационным соотношениям:

$$[A_{mn}, A_{kl}^\dagger] = \delta_{mk}\delta_{nl}, [A_{mn}, B_{kl}^\dagger] = \delta_{mk}\delta_{n,-l}. \quad (2.19)$$

Последнее соотношение является результатом неразличимости сигнального и холостого фотонов, проявляющейся в инвариантности амплитуды бифотона относительно замены переменных сигнального и холостого фотонов:  $\mathbf{q}_s \leftrightarrow \mathbf{q}_i$ . В дальнейшем мы будем принимать данный факт во внимание, используя замену  $u_{mn}(\xi) = v_{mn}(\xi)$  для функций сигнального и холостого фотонов.

Таким образом, уравнения Гейзенберга для операторов мод Шмидта принимают следующую форму:

$$\begin{aligned} \frac{d A_{mn}}{d t} &= \Gamma \sqrt{\lambda_{mn}}(A_{m,-n}^\dagger + B_{mn}^\dagger) = 2\Gamma \sqrt{\lambda_{mn}}B_{mn}^\dagger \\ \frac{d B_{mn}^\dagger}{d t} &= \Gamma \sqrt{\lambda_{mn}}(A_{mn} + B_{m,-n}) = 2\Gamma \sqrt{\lambda_{mn}}A_{mn}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

где были использованы соотношения  $A_{m,-n}^\dagger = B_{mn}^\dagger$ ,  $A_{mn} = B_{m,-n}$  и  $\lambda_{m,n} = \lambda_{m,-n}$ .

Аналитическое решение системы уравнений (2.20) представляет собой выражения, аналогичные преобразованиям Боголюбова и связывающие операторы на выходе из кристалла в конце взаимодействия  $A_{mn}^{out}, B_{mn}^{out}$  с начальными (вакуумными) операторами рождения  $([A_{mn}^{in}]^\dagger, [B_{mn}^{in}]^\dagger)$  / уничтожения  $(A_{mn}^{in}, B_{mn}^{in})$  в соответствующей моде Шмидта:

$$\begin{aligned} A_{mn}^{out} &= A_{mn}^{in} \cosh[G \sqrt{\lambda_{mn}}] + [B_{mn}^{in}]^\dagger \sinh[G \sqrt{\lambda_{mn}}] \\ B_{mn}^{out} &= B_{mn}^{in} \cosh[G \sqrt{\lambda_{mn}}] + [A_{mn}^{in}]^\dagger \sinh[G \sqrt{\lambda_{mn}}], \end{aligned} \quad (2.21)$$

где  $G \equiv \int 2\Gamma dt$  – параметрический гейн. В эксперименте, как правило, производятся измерения, связанные с плосковолновыми модами, наблюдаемыми, к примеру, в фокальной плоскости линзы, поэтому имеет



смысл получить решение именно для плосковолновых операторов рождения и уничтожения фотонов сигнального и холостого пучков. Данное решение были получены также аналитически посредством разложения плосковолновых мод по ортонормированному набору мод Шмидта.

Используя выражение для гамильтониана в терминах мод Шмидта (2.17), можно записать уравнение Гайзенберга для плосковолновых операторов в следующем виде:

$$\frac{d a_{q_{s,i}}}{d t} = \Gamma \sum_{mn} \sqrt{\lambda_{mn}} \frac{u_{mn}(q_{s,i})}{\sqrt{q_{s,i}}} [A_{mn}^\dagger e^{-in \varphi_{s,i}} + B_{mn}^\dagger e^{in \varphi_{s,i}}]. \quad (2.22)$$

Таким образом, используя зависимость от времени операторов Шмидта (2.21), а также производя замену  $S_{mn}(\varphi) \equiv \frac{1}{2} [B_{mn}^{in} e^{-in \varphi} + A_{mn}^{in} e^{in \varphi}]$ , можно получить следующее решение для плосковолновых операторов в конце взаимодействия:

$$a_{q_{s,i}}^{out} = a_{q_{s,i}}^{in} + \sum_{mn} \frac{u_{mn}(q_{s,i})}{\sqrt{q_{s,i}}} [S_{mn}^\dagger(\varphi_{s,i}) \sinh(\sqrt{\lambda_{mn}} G) + S_{mn}(\varphi_{s,i}) (\cosh(\sqrt{\lambda_{mn}} G) - 1)] \quad (2.23)$$

Располагая точным решением для плосковолновых операторов, становится возможным вычислить все измеряемые в эксперименте величины, а именно, среднее число фотонов в сигнальном или холостом пучке, автокорреляционную и кросскорреляционную функции второго порядка по интенсивности, вариацию разности сигналов, ковариацию, фактор подавления шума и т. д. Стоит отметить, что аналогичные вычисления можно провести и в терминах операторов мод Шмидта (2.21), что оказывается в ряде случаев более удобным с учетом независимости таких операторов.

В частности, среднее число фотонов представляет собой усредненный по вакуумному состоянию оператор рождения числа частиц, определяемый через операторы рождения и уничтожения фотонов в конце взаимодействия:

$$\langle N_s(\mathbf{q}_s) \rangle = \langle 0 | a_{q_s}^\dagger a_{q_s} | 0 \rangle. \quad (2.24)$$

Используя временное решение для плосковолновых операторов (2.23), можно получить итоговое выражение распределения интенсивности сигнала в сигнальном (холостом) пучке:

$$\langle N_{s,i}(\mathbf{q}_{s,i}) \rangle = \sum_{mn} \frac{|u_{mn}(\mathbf{q}_{s,i})|^2}{q_{s,i}} (\sinh[\sqrt{\lambda_{mn}}G])^2, \quad (2.25)$$

которое показывает, что различные моды Шмидта вносят вклад в полный сигнал некогерентно, входя в него с определенными новыми весами, зависящими от параметрического коэффициента усиления (гейна):

$$\lambda'_{mn} = \frac{(\sinh[\sqrt{\lambda_{mn}}G])^2}{\sum_{mn} (\sinh[\sqrt{\lambda_{mn}}G])^2}. \quad (2.26)$$

Такие веса могут быть рассмотрены как новые коэффициенты Шмидта, перенормированные с учетом высокого коэффициента параметрического усиления. Очевидно, что при малом гейне  $G \ll 1$  новые коэффициенты Шмидта в точности совпадают с собственными значениями разложения амплитуды бифотона  $\lambda'_{mn} = \lambda_{mn}$ .

Аналогичным образом можно вычислить различные характеризующие излучение вторые моменты:  $\langle N_s^2(\mathbf{q}_s) \rangle$ ,  $\langle N_s(\mathbf{q}_s)N_i(\mathbf{q}_i) \rangle$ , а на их основе такие корреляционные характеристики, как вариацию разности:

$$Var(N_s(\mathbf{q}_s) - N_i(\mathbf{q}_i)) \equiv \langle (N_s(\mathbf{q}_s) - N_i(\mathbf{q}_i))^2 \rangle - \langle N_s(\mathbf{q}_s) - N_i(\mathbf{q}_i) \rangle^2, \quad (2.27)$$

ковариацию:

$$Cov(N_s(\mathbf{q}_s), N_i(\mathbf{q}_i)) \equiv \langle N_s(\mathbf{q}_s)N_i(\mathbf{q}_i) \rangle - \langle N_s(\mathbf{q}_s) \rangle \langle N_i(\mathbf{q}_i) \rangle, \quad (2.28)$$

корреляционные функции второго порядка по интенсивности:

$$G_{is}^{(2)} \equiv \langle N_s(\mathbf{q}_s)N_i(\mathbf{q}_i) \rangle, \quad G_{ss}^{(2)} \equiv \langle N_s^2(\mathbf{q}_s) \rangle. \quad (2.29)$$

Стоит отметить, что даже с учетом того, что моды Шмидта зависят от азимутального угла сигнального и холостого фотонов, среднее число фотонов от азимутального угла не зависит, в то время как ковариация напрямую зависит от разности  $(\varphi_s - \varphi_i)$ , что явным образом демонстрирует корреляции между сигнальным и холостым фотоном, поперечные

компоненты волнового вектора которых коллинеарны или противоположны друг другу:  $\varphi_s - \varphi_i = 0, \pi$ , что отвечает автокорреляциям и кросскорреляциям соответственно:

$$\begin{aligned}
& Cov(N_s(\mathbf{q}_s), N_i(\mathbf{q}_i)) \\
&= \left| \sum_{mn} \frac{u_{mn}(q_s)v_{mn}(q_i)}{\sqrt{q_s q_i}} \sinh[\sqrt{\lambda_{mn}}G] (\cosh[\sqrt{\lambda_{mn}}G] - 1) \cos[n(\varphi_s - \varphi_i)] \right|^2 \\
&+ 2Re \left[ \frac{u_{mn}^*(q_s)v_{mn}^*(q_i)}{\sqrt{q_s q_i}} \sinh[\sqrt{\lambda_{mn}}G] (\cosh[\sqrt{\lambda_{mn}}G] - 1) \cos[n(\varphi_s - \varphi_i)] \right. \\
&\times \left. \sum_{mn} \frac{u_{mn}(q_s)v_{mn}(q_i)}{\sqrt{q_s q_i}} \sinh[\sqrt{\lambda_{mn}}G] \cos[n(\varphi_s - \varphi_i)] \right] \\
&+ \left| \sum_{mn} \frac{u_{mn}(q_s)v_{mn}(q_i)}{\sqrt{q_s q_i}} \sinh[\sqrt{\lambda_{mn}}G] \cos[n(\varphi_s - \varphi_i)] \right|^2 \\
&+ \sum_{mn} \frac{|u_{mn}(q_s)|^2 |v_{mn}(q_i)|^2}{q_s q_i} (\sinh[\sqrt{\lambda_{mn}}G])^4 (1 + 2 \cos[2n(\varphi_s - \varphi_i)]) \\
&+ \left| \sum_{mn} \frac{u_{mn}(q_s)v_{mn}^*(q_i)}{\sqrt{q_s q_i}} (\sinh[\sqrt{\lambda_{mn}}G])^2 \cos[n(\varphi_s - \varphi_i)] \right|^2 \quad (2.30)
\end{aligned}$$

Однако если производится анализ излучения только в определенной плоскости посредством помещения горизонтальной или вертикальной щели перед камерой (или обрабатывается вертикальный/горизонтальный ряд пикселей камеры), ковариация принимает более простую форму и зависит только от модулей волновых векторов сигнального и холостого фотонов  $q_s$  и  $q_i$ .

Стоит отметить, что выражение амплитуды бифотона (2.11) может быть обобщено на более сложные экспериментальные схемы, при этом рассматриваемый метод справедлив и может быть применен всегда, когда амплитуда бифотона имеет периодичность относительно  $(\varphi_s - \varphi_i)$  и оказывается возможным разложение амплитуды бифотона, определяющей гамильтониан взаимодействия, согласно методу Шмидта.

### 2.1.2. Декартова система координат.

В общем виде амплитуда бифотона в полной размерности в декартовой системе координат не может быть представлена как произведение одномерных амплитуд бифотона, одна из которых, к примеру, зависит от  $x$  компонент волнового вектора, а другая - от  $y$  компонент. В связи с этим полное аналитическое решение в декартовой системе координат возможно только при определенных приближениях.

Например, если расстояние между двумя кристаллами мало и оптические оси кристаллов расположены симметрично относительно направления, перпендикулярного направлению распространения волнового вектора накачки, то такую систему можно рассматривать как один кристалл удвоенной длины без эффекта пространственного сноса. В таком случае для описания системы может быть применено приближение двух гауссов (Double-Gauss approximation), в котором функция *sinc* в изначальной амплитуде бифотона заменяется гауссом определенной ширины, соответствующей наилучшей аппроксимации. Таким образом, амплитуда бифотона может быть факторизована на произведение двух компонент, каждая из которых зависит только от  $x$  или  $y$  компонент векторов  $\mathbf{q}_s$  и  $\mathbf{q}_i$ .

$$F(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) = F_1(q_{sx}, q_{ix})F_2(q_{sy}, q_{iy}). \quad (2.31)$$

В таком случае разложение амплитуд бифотона в перпендикулярных направлениях может быть проведено независимо друг от друга:

$$F(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) = \sum_n \sqrt{\lambda_n} u_n(q_{sx}) v_n(q_{ix}) \sum_m \sqrt{\tilde{\lambda}_m} \tilde{u}_m(q_{sy}) \tilde{v}_m(q_{iy}). \quad (2.32)$$

Как результат, амплитуда бифотона может быть представлена в качестве разложения по двумерным модам Шмидта  $U_{nm}(\mathbf{q}_s) = u_n(q_{sx}) \tilde{u}_m(q_{sy})$ ,  $V_{nm}(\mathbf{q}_i) = v_n(q_{ix}) \tilde{v}_m(q_{iy})$ , каждая из которых зависит только от переменных сигнального или холостого фотонов:

$$F(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) = \sum_{nm} \sqrt{\lambda_n \tilde{\lambda}_m} U_{nm}(\mathbf{q}_s) V_{nm}(\mathbf{q}_i). \quad (2.33)$$

Следует отметить, что в силу того, что в данной модели не рассматривается эффект анизотропии, а также в силу того, что накачка обладает аксиальной симметрией, собственные значения и собственные функции для  $x$  и  $y$  направлений одинаковы:  $u_n(\xi) = \tilde{u}_n(\xi)$ ,  $v_n(\xi) = \tilde{v}_n(\xi)$ ,  $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$ .

Таким образом, становится возможным ввести новые коллективные операторы рождения и уничтожения фотонов  $A_{mn}^\dagger, B_{mn}^\dagger$ :

$$\begin{aligned} A_{mn}^\dagger &= \int d\mathbf{q}_s U_{mn}(\mathbf{q}_s) a_{\mathbf{q}_s}^\dagger \\ B_{mn}^\dagger &= \int d\mathbf{q}_i V_{mn}(\mathbf{q}_i) a_{\mathbf{q}_i}^\dagger, \end{aligned} \quad (2.34)$$

которые обеспечивают диагонализацию гамильтониана и позволяют найти аналитические решения не только для операторов Шмидта, но также и для плосковолновых операторов. Поэтому далее не представляет труда получить аналитические выражения для среднего числа фотонов, вариации разности сигналов, корреляционной функции второго порядка по интенсивности и других измеряемых в эксперименте величин. В полной размерности среднее число фотонов в сигнальном пучке (аналогично в холостом пучке) имеет вид:

$$N_s(q_{sx}, q_{sy}) = \sum_{nm} |u_n(q_{sx})|^2 |u_m(q_{sy})|^2 (\sinh[\sqrt{\lambda_n \lambda_m} G])^2. \quad (2.35)$$

Но если в эксперименте производится анализ одномерного распределения посредством фиксации  $q_{iy} = q_{sy} = 0$  (использование щели), то одномерное распределение интенсивности записывается в виде:

$$N_s(q_{sx}) = \sum_{nm} |u_n(q_{sx})|^2 |u_m(0)|^2 (\sinh[\sqrt{\lambda_n \lambda_m} G])^2. \quad (2.36)$$

Кроме того, в случае, когда число мод существенно мало и, следовательно, их веса спадают достаточно резко с увеличением номера моды (что реализуется в эксперименте), можно ограничить суммирование по  $m$  только первым слагаемым, тогда выражение для среднестатистического числа фотонов принимает простую форму:

$$N_s(q_{sx}) = \sum_n |u_n(q_{sx})|^2 |u_0(0)|^2 (\sinh[\sqrt{\lambda_n \lambda_0} G])^2. \quad (2.37)$$

Таким образом, вариация разности чисел фотонов может быть представлена в следующем виде:

$$\text{Var}(N_s - N_i) = \text{Var}(N_s) + \text{Var}(N_i) - 2\text{Cov}(N_s, N_i), \quad (2.38)$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned} \text{Var}(N_s) = & |u_0(0)|^4 \left( \left| \sum_n u_n u_n \sinh \Lambda_n (\cosh \Lambda_n - 1) \right|^2 \right. \\ & + 2\text{Re} \left[ \sum_n u_n^* u_n^* \sinh \Lambda_n (\cosh \Lambda_n - 1) \sum_n u_n u_n \sinh \Lambda_n \right] + \left| \sum_n u_n u_n \sinh \Lambda_n \right|^2 \\ & \left. + \left| \sum_n u_n u_n^* (\sinh \Lambda_n)^2 \right|^2 + 3 \sum_n |u_n|^2 |u_n|^2 (\sinh \Lambda_n)^4 \right) + |u_0(0)|^2 \langle N_s \rangle, \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(N_i) = & |v_0(0)|^4 \left( \left| \sum_n v_n v_n \sinh \Lambda_n (\cosh \Lambda_n - 1) \right|^2 \right. \\ & + 2\text{Re} \left[ \sum_n v_n^* v_n^* \sinh \Lambda_n (\cosh \Lambda_n - 1) \sum_n v_n v_n \sinh \Lambda_n \right] + \left| \sum_n v_n v_n \sinh \Lambda_n \right|^2 \\ & \left. + \left| \sum_n v_n v_n^* (\sinh \Lambda_n)^2 \right|^2 + 3 \sum_n |v_n|^2 |v_n|^2 (\sinh \Lambda_n)^4 \right) + |v_0(0)|^2 \langle N_s \rangle, \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(N_s, N_i) = & |v_0(0)|^2 |u_0(0)|^2 \left( \left| \sum_n u_n v_n \sinh \Lambda_n (\cosh \Lambda_n - 1) \right|^2 \right. \\ & + 2\text{Re} \left[ \sum_n u_n^* v_n^* \sinh \Lambda_n (\cosh \Lambda_n - 1) \sum_n u_n v_n \sinh \Lambda_n \right] + \left| \sum_n u_n v_n \sinh \Lambda_n \right|^2 \\ & \left. + \left| \sum_n u_n v_n^* (\sinh \Lambda_n)^2 \right|^2 + 3 \sum_n |u_n|^2 |v_n|^2 (\sinh \Lambda_n)^4 \right), \end{aligned} \quad (2.41)$$

а также  $u_n = u_n(q_{sx})$ ,  $v_n = v_n(q_{ix})$ ,  $\Lambda_n = G\sqrt{\lambda_n \lambda_0}$ .

Стоит отметить, что такое приближение работает достаточно хорошо для двух близко расположенных кристаллов, что подтверждается формой получаемого спектра, а также рядом других экспериментов.

## **2.2. Пространственная структура излучения и корреляций в состоянии яркого сжатого вакуума с точки зрения мод Шмидта.**

Разработанный теоретический подход может быть использован для описания угловых распределений интенсивности сигнала сжатых состояний, различных корреляционных характеристик, а также их интегральных величин, причем не только качественно, но и количественно. В рамках данного подхода возможно описание различных экспериментальных конфигурации, включающих один нелинейный кристалл, два последовательно расположенных нелинейных кристалла, удаленных на некоторое расстояние друг от друга, а также учет диспергирующей среды между кристаллами [5].

### **2.2.1. Угловые распределения интенсивности и корреляций.**

Так как генерация параметрического излучения происходит на всей длине кристалла, то для получения наибольшего усиления сигнала целесообразно использовать кристаллы с большей длиной. Однако чем больше длина кристалла, тем ярче проявление пространственного сноса, который ведет к нарушению цилиндрической симметрии излучения. Для устранения пространственного сноса, наведения цилиндрической симметрии и одновременного усиления излучения используют два кристалла с оптическими осями, расположенными в одной плоскости под симметричными углами к направлению распространения накачки. Как правило, в эксперименте по техническим причинам между кристаллами имеется небольшой воздушный зазор, который при необходимости может быть увеличен или заполнен какой-либо средой.

Амплитуда бифотона, соответствующая такой конфигурации нелинейных кристаллов с наличием воздушного промежутка между ними, имеет вид:

$$\begin{aligned}
& F(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) \\
&= C \exp \left\{ -\frac{\sigma^2 (\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i)^2}{2} \right\} \operatorname{sinc} \left( \frac{L (\mathbf{q}_s - \mathbf{q}_i)^2}{4k_p} \right) \\
&\times \cos \left( \frac{L (\mathbf{q}_s - \mathbf{q}_i)^2}{4k_p} + \frac{\delta n k_s d}{n_s} + \frac{d (\mathbf{q}_s^{\text{air}} - \mathbf{q}_i^{\text{air}})^2}{4k_p^{\text{air}}} \right) \\
&\times \exp \left\{ i \left( \frac{L (\mathbf{q}_s - \mathbf{q}_i)^2}{4k_p} + \frac{\delta n k_s d}{n_s} + \frac{d (\mathbf{q}_s^{\text{air}} - \mathbf{q}_i^{\text{air}})^2}{4k_p^{\text{air}}} \right) \right\}, \quad (2.42)
\end{aligned}$$

где  $C$  – нормировочная постоянная,  $L$  – длина кристалла,  $d$  – длина воздушного промежутка,  $k_p^{\text{air}} = n_p^{\text{air}} \frac{\omega_p}{c}$ ,  $n_{p,s,i}^{\text{air}}$  – показатели преломления накачки, сигнального и холостого излучения в воздушном промежутке между кристаллами.  $\delta n = n_p^{\text{air}} - \frac{1}{2} (n_s^{\text{air}} + n_i^{\text{air}})$ ,  $\mathbf{q}_{s,i}^{\text{air}}(\mathbf{q}_{s,i})$  – поперечные компоненты волновых векторов сигнального и холостого пучков в воздушном зазоре (кристалле), которые в цилиндрической системе координат характеризуются модулем вектора  $q_{s,i}$  и азимутальным углом  $\varphi_{s,i}$ :  $\mathbf{q}_{s,i} = (q_{s,i}, \varphi_{s,i})$ . Для малых углов вылета фотонов:  $\frac{(q_s^{\text{air}} - q_i^{\text{air}})^2}{4k_p^{\text{air}}} \approx n_s \frac{(q_s - q_i)^2}{4k_p}$ . В этом случае амплитуда бифотона зависит от четырех полярных координат, описывающих поперечные волновые векторы сигнального и холостого пучков. Однако ключевой точкой цилиндрической симметрии амплитуды бифотона является факт ее зависимости от углов  $\varphi_{s,i}$  не по отдельности, а только от разности  $(\varphi_s - \varphi_i)$ , вследствие чего амплитуда бифотона в рассматриваемой конфигурации кристаллов проявляет инвариантность относительно азимутального угла, а значит, задача может быть рассмотрена в цилиндрической системе координат при помощи подхода, описанного в разделе 2.1.1.

В теоретических расчетах были использованы параметры экспериментальной установки, представленной на рисунке 2.1(а), в которой яркий сжатый вакуум генерировался в режиме коллинеарного вырожденного синхронизма типа-I в оптическом параметрическом усилителе,



представленном парой нелинейных кристаллов ВВО (бэ́та-барий-борат), от третьей гармоники Nd:YAG лазера (длина волны 354,7 нм, частота повторения 1 кГц, ширина импульса 18 пс, средняя мощность 20 мВт). Накачка гауссова профиля фокусировалась на пару 3 мм кристаллов ВВО с помощью системы линз (L1, L2), позволяющих уменьшить диаметр перетяжки до 120 мкм (ширина на половине высоты по интенсивности). Кристаллы были ориентированы в конфигурации компенсирующей анизотропии, то есть с оптическими осями в одной плоскости, но под симметричными углами по отношению к направлению распространения накачки [103,104] и помещены на расстояние 7 мм друг относительно друга.

Для фильтрации параметрического излучения накачка была удалена при помощи дихроичного зеркала (DM) и фильтра из красного стекла (RG645). При помощи интерференционного фильтра (IF) производилась частотная фильтрация: фильтр выделяет полосу пропускания в 10 нм вокруг длины волны 710 нм, что позволяет описывать эксперимент при помощи только угловых переменных вместо полного частотно-углового рассмотрения. Двумерные пространственные спектры яркого сжатого вакуума записывались при помощи CCD камеры, установленной в фокальной плоскости линзы  $L$  (фокусное расстояние  $f = 100$  мм), помещенной на расстоянии  $f$  от второго кристалла. Декартовы координаты в плоскости CCD камеры соответствуют внешнему углу рассеяния  $\theta$  как  $x = f * \theta$ . Для сравнения теоретических предсказаний с экспериментально измеренными угловыми распределениями интенсивности и вариации разности числа фотонов при обработке экспериментальных данных проводились срезы двумерного спектра вдоль оси, ортогональной к основной плоскости кристалла (белый пиксель на рисунке 2.1(a)). Угловое распределение интенсивности излучения вдоль указанной оси (рисунок 2.1(b)) характеризуется симметричным профилем относительно направления коллинеарного вылета фотонов и близко к гауссовой форме, что говорит о небольшом числе мод, присутствующих в генерируемом излучении. В самом

деле, первая мода Шмидта для данной конфигурации обладает гауссовым профилем, вторая имеет симметричную относительно коллинеарного направления вылета фотонов двухпиковую структуру с минимумом в центре и т. д. То есть гауссов профиль интенсивности говорит о значительном подавлении мод высоких номеров. Согласно проведенному расчету параметр Шмидта, характеризующий число независимых мод, присутствующих в излучении, для данной конфигурации равен  $K = 1.9$ , то есть в генерируемом сжатом вакууме присутствует 1.9 угловых мод в рассматриваемом  $x$  направлении. На рисунке 2.1 красная сплошная кривая соответствует экспериментальным данным, черная пунктирная – теоретическим расчетам. Как видно, наблюдается хорошее согласие теоретических вычислений с экспериментальными данными.

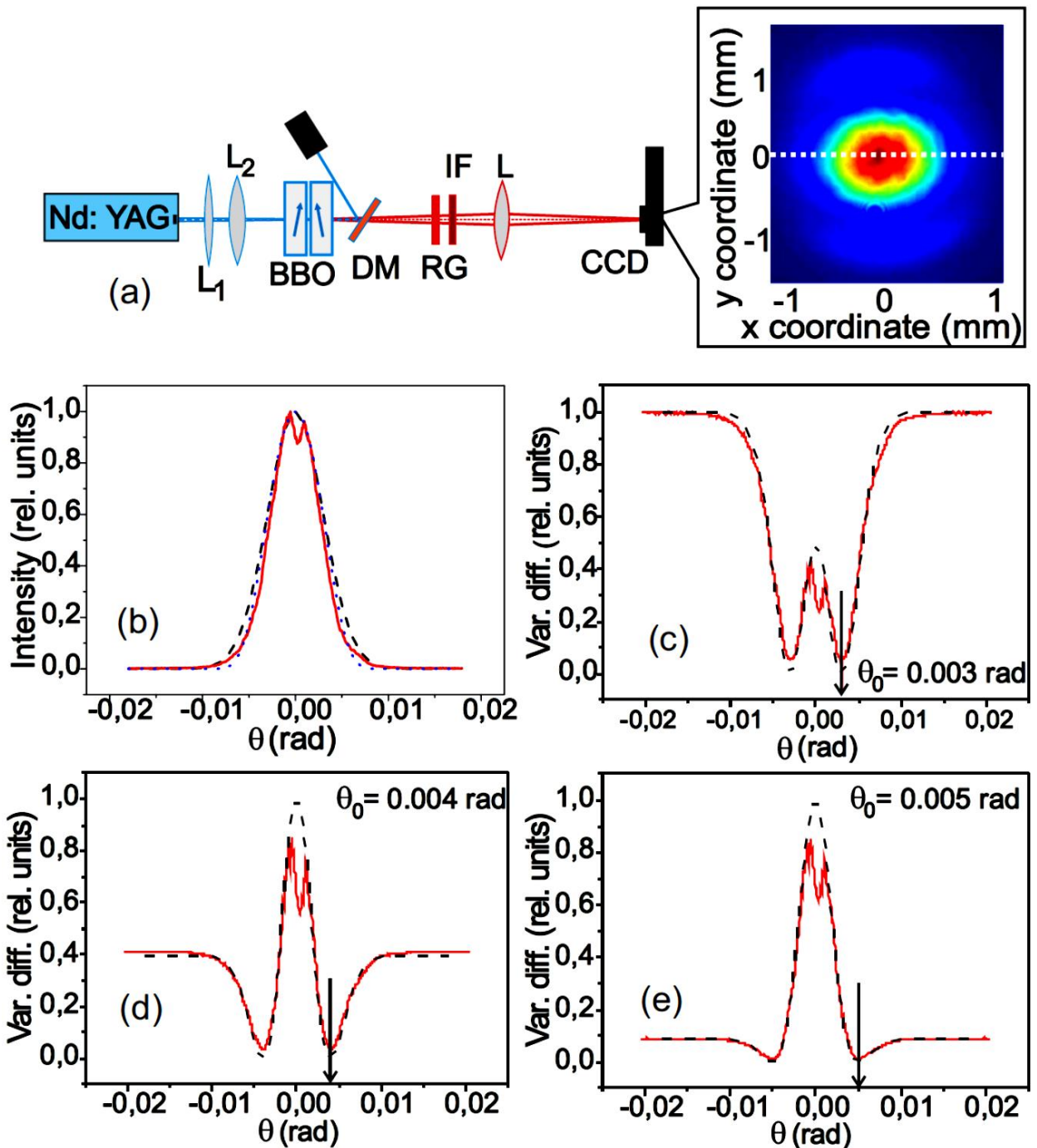
Для изучения пространственных корреляций фотонов в данной системе рассматривалась дисперсия (вариация) разности числа фотонов, которая показывает корреляции интенсивности между различными плоскостями волновыми модами пучков сигнальных и холостых фотонов. Ее величина тем ниже, чем более скоррелированными оказываются выбранные моды, и может быть вычислена следующим образом:

$$\text{Var}(N_s(\mathbf{q}_s) - N_i(\mathbf{q}_i)) \equiv \langle |(N_s(\mathbf{q}_s) - N_i(\mathbf{q}_i))^2| \rangle - \langle |N_s(\mathbf{q}_s) - N_i(\mathbf{q}_i)| \rangle^2 \quad (2.43)$$

В случае одномерного среза двумерного распределения вариация разности зависит только от углов вылета сигнального и холостого фотонов в рассматриваемой плоскости  $\theta_{s,i} = \frac{q_{s,i}}{k_{s,i}}$ .

При вычислении вариации разности числа фотонов для всех получаемых угловых распределений фиксировался определенный угол вылета холостого фотона  $\theta_0$ , затем проводилось вычисление вариации разности сигналов между фиксированным углом и всеми другими углами вылета сигнальных фотонов с учетом усреднения по вакуумному состоянию согласно (2.23), (2.24) и (2.43), таким образом строилось распределение

вариации разности чисел сигнальных фотонов по углу при фиксированном угле вылета холостого фотона.



**Рисунок 2.1.** (a) – установка для изучения угловых спектров яркого сжатого вакуума и типичное двумерное распределение интенсивности, полученное на CCD камере с белой пунктирной линией, показывающей направление одномерного среза; (b) – экспериментальная и теоретическая зависимости углового распределения интенсивности; (c),(d),(e) - угловые распределения вариации разности числа фотонов для различных фиксированных углов вылета холостого фотона  $\theta_0$  (c) – 3 мрад; (d) – 4 мрад; (e) – 5 мрад, угол  $\theta_0$  отмечен стрелкой. На всех рисунках красная сплошная линия соответствует экспериментальным данным, черная пунктирная – теоретическим расчетам.

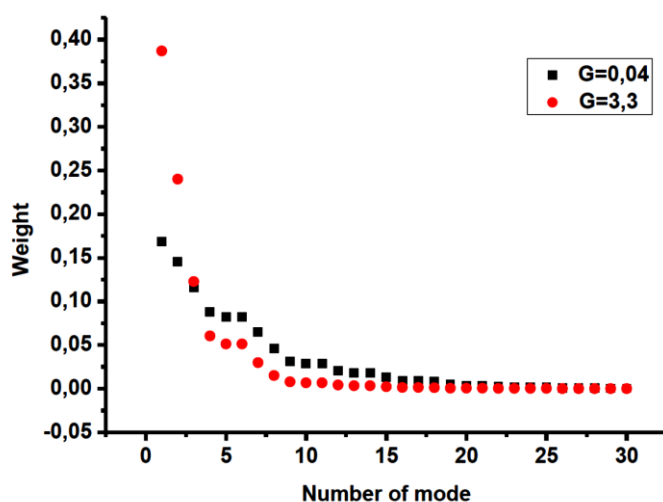
В эксперименте производилось измерение разницы сигналов между фиксированным углом и другими пикселями CCD камеры  $S(\theta) - S(\theta_0)$ , посредством учета 4000 кадров вариация была измерена как функция угла  $\theta$  для фиксированного  $\theta_0$ .

Полученные теоретические и экспериментальные графики были нормированы на максимальное значение. На рисунках 2.1(c),(d),(e) продемонстрированы три угловых распределения вариации разности для различных фиксированных углов  $\theta_0$  (обозначены стрелкой). Красным цветом представлены экспериментальные результаты, черным – теоретические. В общем случае каждое угловое распределение вариации разности содержит два провала и один пик. Правый провал соответствует фиксированному углу  $\theta_0$  и демонстрирует подавление шума разности интенсивностей посредством автокорреляций, подобный провал наблюдается также и в тепловом свете. Левый провал соответствует кросскорреляциям между сигнальным и холостым пучками фотонов и находится симметрично правому относительно коллинеарного направления вылета фотонов (относительно пика в центре). Таким образом, вне зависимости от фиксированного угла максимально скоррелированные фотоны генерируются на заданном выбранном угле (классические корреляции), а также на угле, симметричном заданному относительно центра (квантовые корреляции), при этом стоит отметить, что наблюдается целая область углов, в которой можно наблюдать скоррелированные к данному фотоны за счет провала конечной ширины в угловом распределении вариации разности чисел фотонов. Пик в центре образуется за счет избыточных флуктуаций в режиме супербанчинга, когда частотно-вырожденные сигнальный и холостой фотоны становятся также неразличимы по углу. Как видно, рисунки 2.1(c),(d),(e) демонстрируют хорошее согласие теории с экспериментом. Изрезка в центре экспериментальной кривой связана с юстировкой экспериментальной установки.

## 2.2.2. Зависимость пространственных свойств яркого сжатого вакуума от интенсивности накачки

Рассматриваемая теоретическая модель предполагает, что моды Шмидта не зависят от коэффициента параметрического усиления (гейна), в то время как веса мод Шмидта изменяются согласно формуле (2.26): с увеличением гейна коэффициенты, соответствующие модам с низкими номерами, все более и более усиливаются, при этом коэффициенты, соответствующие модам с высокими номерами, подавляются. Таким образом, с увеличением интенсивности накачки, распределение весов Шмидта становится более резким (рисунок 2.2), что ведет к редукции эффективного числа мод (редукции параметра Шмидта):

$$K = \left[ \sum_{nm} \lambda'_{nm}{}^2 \right]^{-1} \quad (2.44)$$

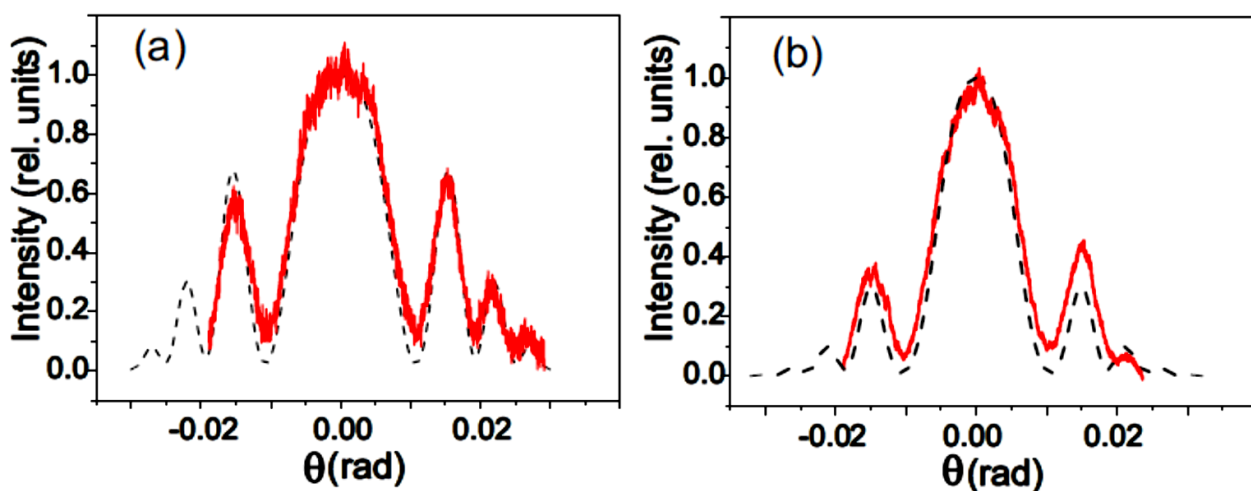


**Рисунок 2.2.** Заселенность перенормированных коэффициентов Шмидта одномерного среза амплитуды бифотона согласно формуле (2.26) для различных значений коэффициента параметрического усиления:  $G=0.04$  (черные квадраты),  $G=3.3$  (красные кружки)

В свою очередь, редукция мод Шмидта явным образом приводит к изменению формы спектра, что было продемонстрировано как теоретически, так и экспериментально (экспериментальная группа проф. М. В. Чеховой) для схемы из двух 1 мм кристаллов с воздушным промежутком между ними. Использование тонких кристаллов способствует формированию изначально большого числа мод, а воздушный зазор, сравнимый с длиной кристалла,

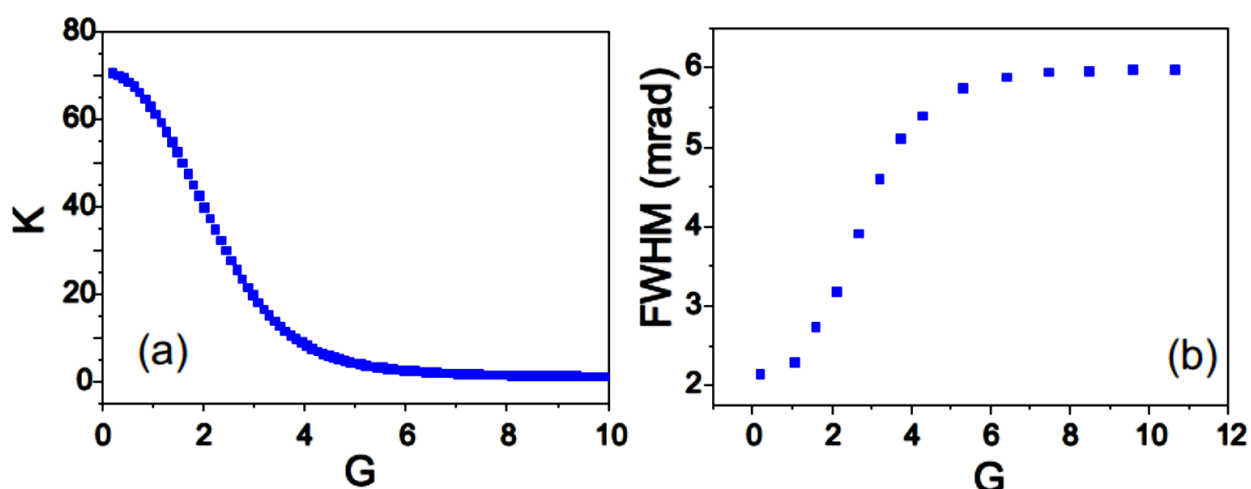
приводит к возникновению интерференционной структуры спектра. С увеличением интенсивности накачки число мод генерируемого излучения сокращается, что отражается в сужении углового спектра и исчезновении его интерференционной структуры.

На рисунке 2.3 представлены одномерные теоретические (черная кривая) и экспериментальный (красная кривая) угловые спектры сжатого вакуума для двух разных мощностей накачки: 29 мВт и 73 мВт, что соответствует коэффициентам параметрического усиления  $G = 2.1$  и  $G = 3.3$ . Как было отмечено, угловое распределение интенсивности обладает интерференционной структурой, в которой положения минимумов и максимумов задаются фазовой задержкой излучения, набегающей в воздушном промежутке, и не зависят от мощности накачки, в то время как форма пиков непосредственно зависит от параметрического коэффициента усиления (гейна). При низкой мощности накачки боковые максимумы более выражены, центральный пик значительно шире, чем при высокой мощности накачки, что косвенно говорит о наличии большего числа мод в случае низкого гейна. Как видно, теоретические спектры хорошо аппроксимируют экспериментальные данные и соответствуют тенденции выделения одной моды при увеличении коэффициента параметрического усиления.



**Рисунок 2.3.** Нормированные угловые теоретические (черная кривая) и экспериментальные (красная кривая) спектры яркого сжатого вакуума для конфигурации двух нелинейных кристаллов длиной 1 мм с воздушным промежутком 3 мм для мощности накачки а) 29 мВт ( $G=2.1$ ), б) 73 мВт ( $G=3.3$ ).

Расчет зависимости параметра Шмидта от коэффициента параметрического усиления (гейна) напрямую показывает редукцию числа мод с ростом параметрического гейна: параметр Шмидта стремится к единице в пределе высоких мощностей накачки (рисунок 2.4(a)), что согласуется с экспериментальными измерениями, проведенными в группах *Allevi* и *Bondani* [105], где наблюдалось уменьшение параметра Шмидта при увеличении мощности накачки в диапазоне мощностей ниже порога истощения. На рисунке 2.4(b) представлено поведение ширины на половине высоты углового распределения ковариации с увеличением коэффициента параметрического усиления согласно формуле (2.28). Ширина ковариации с ростом интенсивности увеличивается, что говорит об увеличении угловой ширины корреляций, то есть угловой диапазон, в котором можно наблюдать фотоны, скоррелированные к выбранному под определенным углом фотону, увеличивается. Такой эффект наблюдался в экспериментальных работах *Brida et al.* [106] и *Allevi et al.* [107]. В пределе высоких значений коэффициента параметрического усиления ширина ковариации выходит на постоянную величину, которая ограничена угловым размером первой моды Шмидта, так как только первая мода Шмидта выживает при высоком значении коэффициента параметрического усиления в силу перенормировки собственных значений разложения Шмидта.



**Рисунок 2.4.** Теоретический расчет а) параметра Шмидта  $K$  и б) ширины ковариации на половине высоты от параметрического коэффициента усиления для той же экспериментальной конфигурации, что и на рисунке 2.3.

### 2.3. Фильтрация пространственного излучения диафрагмой.

Часто в эксперименте необходимо производить фильтрацию пространственного или частотного излучения для того, чтобы отдельно рассматривать частотный или пространственный спектр. Если в случае частотного излучения фильтрация производится монохроматором, то в пространственном случае наиболее часто используется диафрагма конечного размера или волокно, позволяющее, к примеру, фильтровать одну моду Шмидта. Как правило, более распространённым и менее трудоёмким способом фильтрации является использование диафрагмы [6].

В общем случае задача фильтрации диафрагмой является двумерной, поэтому если амплитуда бифотона характеризуется цилиндрической симметрией, то задачу следует рассматривать в цилиндрических координатах; если два кристалла в компенсационной конфигурации расположены на небольшом расстоянии друг от друга, то систему можно рассматривать в приближении двух гауссов и т. д. Таким образом, в отдельных случаях можно найти полное число двумерных мод системы, но такое решение выглядит весьма громоздким. Для более простого рассмотрения, не теряя общности, можно учитывать два перпендикулярных направления отдельно, а общее число пространственных мод – как произведение числа мод в каждом направлении. В таком случае операторы рождения и уничтожения зависят только от одной переменной – угла вылета сигнального (холостого) фотонов:

$$a_{\theta_{s,i}}^{out} = a_{\theta_{s,i}}^{in} + \sum_n u_n(\theta_{s,i}) [B_n^\dagger \sinh(\sqrt{\lambda_n} G) + A_n (\cosh(\sqrt{\lambda_n} G) - 1)] \quad (2.45)$$

При этом ненормированная автокорреляционная функция второго порядка по интенсивности есть не что иное, как оператор числа фотонов в квадрате, усредненный по вакуумному состоянию, проинтегрированный по рассматриваемой угловой области диафрагмы:

$$G_{SS}^{(2)} = \langle N_S^2 \rangle = \int d\theta_s d\theta'_s \langle 0 | a_n^{\dagger out}(\theta_s) a_m^{\dagger out}(\theta'_s) a_k^{out}(\theta_s) a_l^{out}(\theta'_s) | 0 \rangle \quad (2.46)$$



Таким образом, в невырожденном режиме, где интегральные операторы  $A_n, B_n$  отличаются друг от друга по какому-либо параметру (например, значению поляризации), и, следовательно, выполняются коммутационные соотношения:  $[A_m, A_n^\dagger] = \delta_{mn}, [A_m, B_n^\dagger] = 0$ , автокорреляционная функция в общем виде в фильтруемой области представляется как:

$$G_{SS}^{(2)} = \int d\theta_s d\theta'_s \sum_m |u_m(\theta'_s)|^2 (\sinh(\sqrt{\lambda_m} G))^2 \sum_n |u_n(\theta_s)|^2 (\sinh(\sqrt{\lambda_n} G))^2 + \int d\theta_s d\theta'_s \sum_m u_m^*(\theta'_s) u_m(\theta_s) (\sinh(\sqrt{\lambda_m} G))^2 \sum_n u_n^*(\theta_s) u_n(\theta'_s) (\sinh(\sqrt{\lambda_n} G))^2 \quad (2.47)$$

В эксперименте, как правило, измеряется нормированная на среднее число фотонов  $\langle N_s \rangle = \int d\theta_s \sum_n |u_n(\theta_s)|^2 (\sinh(\sqrt{\lambda_n} G))^2$  в квадрате корреляционная функция:

$$g_{SS}^{(2)} = \frac{G_{SS}^{(2)}}{\langle N_s \rangle^2}. \quad (2.48)$$

Таким образом, из (2.47) нетрудно заметить, что в случае диафрагмы бесконечно малого размера, где  $\theta_s = \theta'_s$ , интегрирование сводится к взятию значения подынтегрального выражения в точке, в таком случае автокорреляционная функция тождественно равна двум  $g_{SS}^{(2)} \equiv 2$ , что говорит о выделении одной моды теплового света. Если же фильтрации диафрагмой не производится, то интегрирование в (2.47) идет по всей бесконечной области, и в силу ортогональности мод Шмидта нормированная автокорреляционная функция второго порядка по интенсивности имеет вид:

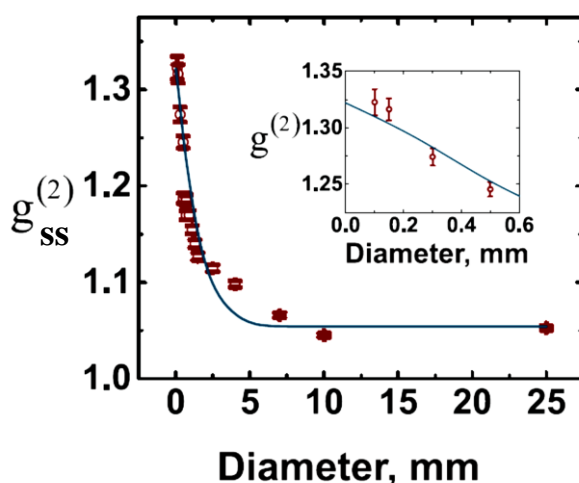
$$g_{SS}^{(2)} = 1 + \frac{\sum_n (\sinh(\sqrt{\lambda_n} G))^4}{\left(\sum_m (\sinh(\sqrt{\lambda_m} G))^2\right)^2} = 1 + \frac{1}{K} \quad (2.49)$$

где  $K$  – параметр Шмидта, определяющий число эффективных мод, присутствующих в излучении:  $K = \frac{1}{\sum_n \tilde{\lambda}_n^2}$ , и включающий перенормированные от параметрического коэффициента усиления (гейна)

собственные значения разложения Шмидта выбранного направления амплитуды бифотона:

$$\tilde{\lambda}_n = \frac{(\sinh(\sqrt{\lambda_n}G))^2}{\sum_m (\sinh(\sqrt{\lambda_m}G))^2} \quad (2.50)$$

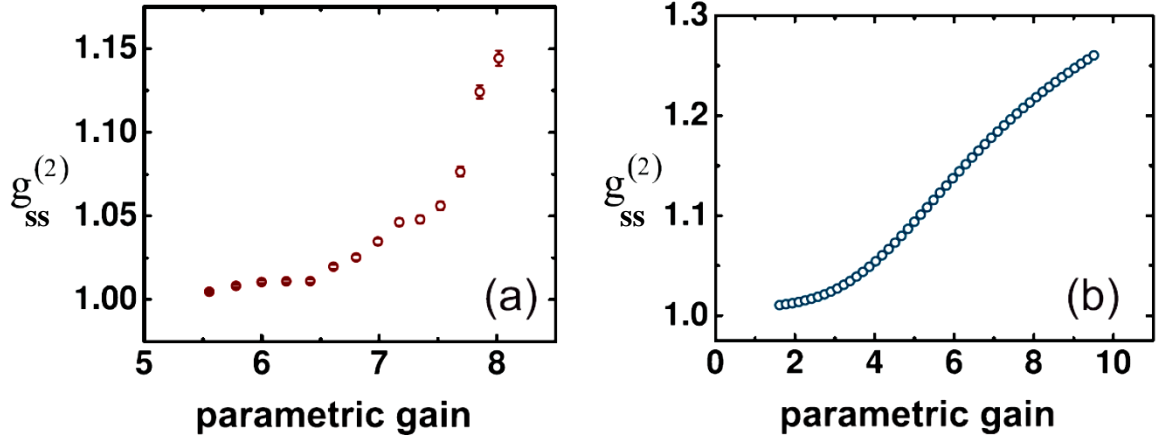
Зависимость автокорреляционной функции от размера диафрагмы, вычисленная согласно (2.47), продемонстрирована на рисунке 2.5, где синяя кривая представляет теоретическую зависимость, красные точки – экспериментальные данные. Расчет был произведен для следующего эксперимента: яркий сжатый вакуум генерировался в оптическом параметрическом усилителе при помощи третьей гармоники Nd:YAG лазера с длиной волны 355 нм (длительность импульса 18 пс, частота повторения 1кГц), при помощи системы линз диаметр накачки был уменьшен до размера 230 мкм. Оптический параметрический усилитель включал в себя два кристалла ВВО, вырезанных для коллинеарного частотно-вырожденного синхронизма типа-II и разделенных воздушным промежутком в 1 см. Эффект анизотропии был скомпенсирован при помощи ориентирования оптических осей кристаллов под симметричными углами относительно направления распространения накачки.



**Рисунок 2.5.** Автокорреляционная функция второго порядка по интенсивности как функция диаметра диафрагмы, красные кружки – экспериментальные точки, синяя кривая – теоретическая зависимость. На вставке показана увеличенная область малых диаметров апертуры.

Из рисунка 2.5 видно, что при уменьшении диаметра диафрагмы корреляционная функция возрастает, число эффективных мод в фильтруемом излучении уменьшается и выходит на значение, соответствующее  $g_{ss}^{(2)} = 1.32$ , что связано с присутствием в фильтруемом излучении определенного количества  $K_t = 3.1$  частотных мод, так как в эксперименте измеряется общее число пространственно – частотных мод. Данный факт был учтен при вычислении теоретической зависимости согласно приближенному выражению для полного числа пространственно – частотных мод:  $M = K_t * K_s$ , где  $K_s$  – число пространственных мод. Как видно, наблюдается хорошее согласие теоретических предсказаний с экспериментальными данными.

Редукция числа эффективных мод происходит также с ростом коэффициента параметрического усиления (гейна), то есть с ростом интенсивности накачки при постоянном размере диафрагмы (или ее отсутствии): на рисунке 2.6 представлены экспериментальная (рисунок 2.6(a)) и теоретическая (рисунок 2.6 (b)) зависимости корреляционной функции от параметрического коэффициента усиления. Теоретический расчет произведен с учетом присутствия только одной частотной моды, в то время как в эксперименте в излучении присутствовало  $K_t = 1.3$  частотных мод. Количество частотных мод также изменяется с увеличением коэффициента параметрического усиления, поэтому в данном случае нельзя воспользоваться упрощенной формулой для общего числа мод  $M = K_t * K_s$ , и представленные экспериментальные и теоретические зависимости имеют только качественное совпадение: ярко прослеживается тенденция выделения одной моды излучения при увеличении параметрического коэффициента усиления.



**Рисунок 2.6.** Зависимость автокорреляционной функции  $g_{ss}^{(2)}$  от параметрического коэффициента усиления: **а)** экспериментальная зависимость и **б)** теоретическая зависимость с учетом присутствия только одной частотной моды.

Аналогичным образом может быть вычислена кросскорреляционная функция второго порядка по интенсивности, отвечающая за корреляции между сигнальными и холостыми фотонами излучения: произведение операторов числа фотонов сигнального и холостого излучения усредняется по вакуумному состоянию:

$$G_{is}^{(2)} = \langle N_s N_i \rangle = \int d\theta_s d\theta_i \langle 0 | a_n^{\dagger out}(\theta_s) a_m^{\dagger out}(\theta_i) a_k^{out}(\theta_s) a_l^{out}(\theta_i) | 0 \rangle \quad (2.51)$$

В невырожденном случае прямое использование выражения (2.51) позволяет получить кросскорреляционную функцию в общем виде для произвольного диаметра диафрагмы:

$$\begin{aligned} G_{is}^{(2)} = & \int d\theta_s d\theta_i \sum_m |v_m(\theta_i)|^2 (\sinh(\sqrt{\lambda_m} G))^2 \sum_n |u_n(\theta_s)|^2 (\sinh(\sqrt{\lambda_n} G))^2 \\ & + \int d\theta_s d\theta_i \sum_m v_m(\theta_i) u_m(\theta_s) \sinh(\sqrt{\lambda_m} G) (\cosh(\sqrt{\lambda_m} G) - 1) \\ & \times \sum_n u_n^*(\theta_s) v_n^*(\theta_i) \sinh(\sqrt{\lambda_n} G) (\cosh(\sqrt{\lambda_n} G) - 1) \\ & + \int d\theta_s d\theta_i \sum_m v_m(\theta_i) u_m(\theta_s) \sinh(\sqrt{\lambda_m} G) \sum_n u_n^*(\theta_s) v_n^*(\theta_i) \sinh(\sqrt{\lambda_n} G) (\cosh(\sqrt{\lambda_n} G) \\ & - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int d\theta_s d\theta_i \sum_m u_m^*(\theta_s) v_m^*(\theta_i) \sinh(\sqrt{\lambda_m} G) \sum_n v_n(\theta_i) u_n(\theta_s) \sinh(\sqrt{\lambda_n} G) (\cosh(\sqrt{\lambda_n} G) \\
& \quad - 1) \\
& + \int d\theta_s d\theta_i \sum_m u_m^*(\theta_s) v_m^*(\theta_i) \sinh(\sqrt{\lambda_m} G) \times \sum_n v_n(\theta_i) u_n(\theta_s) \sinh(\sqrt{\lambda_n} G) \quad (2.52)
\end{aligned}$$

Нормированная на произведение усредненных по вакуумному состоянию сигналов сигнального  $\langle N_s \rangle = \int d\theta_s \sum_n |u_n(\theta_s)|^2 (\sinh(\sqrt{\lambda_n} G))^2$  и холостого пучков  $\langle N_i \rangle = \int d\theta_i \sum_m |v_m(\theta_i)|^2 (\sinh(\sqrt{\lambda_m} G))^2$  кросскорреляционная функция имеет вид:

$$g_{is}^{(2)} = \frac{G_{is}^{(2)}}{\langle N_s \rangle \langle N_i \rangle} \quad (2.53)$$

При вычислении интегральных величин (без использования диафрагмы) в силу ортонормированности мод Шмидта интегральные сигналы оказываются одинаковы  $\langle N_s \text{int} \rangle = \langle N_i \text{int} \rangle = \sum_n (\sinh(\sqrt{\lambda_n} G))^2 = N$ , интегральная кросскорреляционная функция зависит от параметра Шмидта и интегрального числа фотонов и имеет вид:

$$g_{is}^{(2)} = 1 + \frac{1}{K} + \frac{1}{N}. \quad (2.54)$$

В вырожденном случае операторы  $A_n$  и  $B_n$  неразличимы и удовлетворяют коммутационным соотношениям  $[A_m, A_n^\dagger] = \delta_{mn}$ ,  $[A_m, B_n^\dagger] = \delta_{mn}$ . Проводя аналогичные описанным выше вычисления, можно показать, что в данном случае кросскорреляционная и автокорреляционная функции совпадают, в частности, их интегральные величины равны:

$$g_{is}^{(2)} = g_{ss}^{(2)} = 1 + \frac{2}{K} + \frac{1}{N}. \quad (2.55)$$

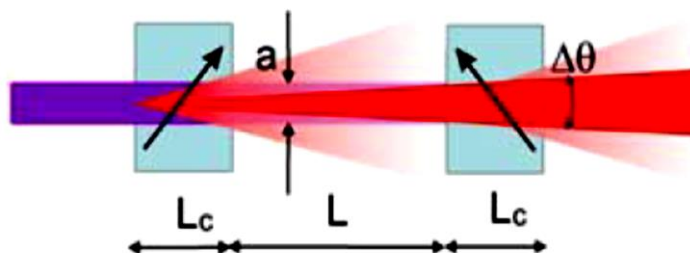
Кроме того, из (2.55) следует, что в случае выделения одной пространственной моды (бесконечно узкая диафрагма) при наличии одной частотной моды в системе в режиме высокоинтенсивной накачки ( $N \gg 1$ ) авто- и кросскорреляционные функции достигают максимального значения, равного трем  $g_{is}^{(2)} = g_{ss}^{(2)} = 3$ .

## 2.4. Выделение одной пространственной моды в схеме с двумя пространственно разделенными кристаллами.

Многие современные приложения, такие как детектирование гравитационных волн, фазовая суперчувствительность, приготовление экзотических квантовых состояний и т. д. требуют наличия неклассических одномодовых источников с высоким числом фотонов на моду. Перспективным кандидатом для таких целей выступает поле в состоянии яркого сжатого вакуума. Однако, как правило, при генерации такого неклассического поля используют тонкие кристаллы и короткие импульсы во избежание эффектов пространственного и временного сноса, что, в свою очередь, неизбежно ведет к многомодовой структуре излучения, при этом фильтрация одной моды при помощи диафрагмы неизбежно ведет к потерям неклассичности света. Таким образом, задача создания пространственно одномодового источника на основе поля в состоянии сжатого вакуума с сохранением всех свойств такого поля представляется весьма актуальной. В данном разделе рассматривается возможность создания такого источника с высоким числом фотонов на моду и сохранением всех свойств сжатых состояний в схеме из двух пространственно разделенных воздушным промежутком нелинейных кристаллов [4].

Обоснованность использования конфигурации двух кристаллов с целью выделения одной пространственной моды (частотная мода фильтруется узкополосным фильтром) подтверждают следующие простые соображения: при увеличении расстояния между кристаллами все меньшая часть излучения от первого кристалла усиливается во втором, угловую ширину излучения на выходе из второго кристалла можно оценить как  $\Delta\theta = a/L$ , где  $a$  – диаметр накачки,  $L$  – длина воздушного зазора между кристаллами (рисунок 2.7). С учетом того, что угловая ширина корреляций  $\delta\theta$  практически не зависит от расстояния между кристаллами, при определенной длине воздушного зазора угловые ширины спектра и

корреляций должны совпасть, что соответствует выделению одной моды согласно соотношению Федорова [68].

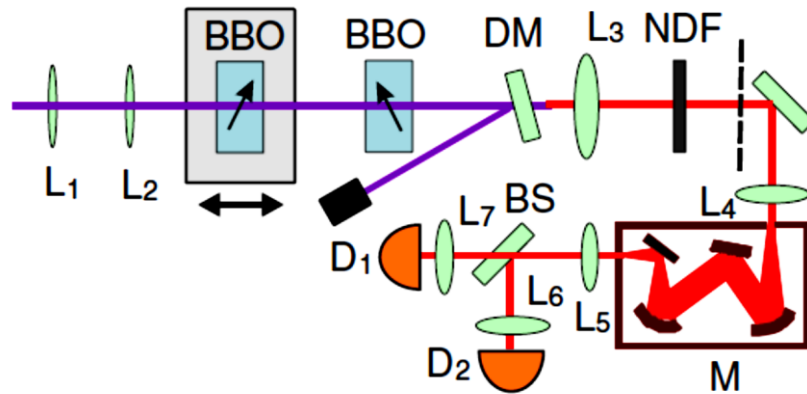


**Рисунок 2.7.** Схема выделения одной пространственной моды.

В данной задаче для исключения эффекта анизотропии, наведения цилиндрической симметрии, а также увеличения размеров оптического параметрического усилителя два кристалла были расположены последовательно по отношению к накачке в компенсационной схеме (оптические оси кристаллов находятся в одной плоскости, но под симметричными углами относительно направления волнового вектора накачки). Таким образом, амплитуда бифотона для данной экспериментальной конфигурации удовлетворяет цилиндрической симметрии и имеет вид (2.42).

Используя амплитуду бифотона (2.42) и теоретический подход, описанный в разделе 2.1.1., можно вычислить интегральный сигнал, профили интенсивности параметрического излучения при различном расстоянии между кристаллами, корреляционную функцию и другие характеристики генерируемого излучения. Теоретические расчеты были проведены для экспериментальной установки, показанной на рисунке 2.8. Третья гармоника YAG: Nd лазера с длиной волны 354,7 нм (длительность импульса 18 пс, частота повторения 1 кГц, средняя мощность 60 мВт) фокусируется системой линз L1, L2 в перетяжку 200 мкм на систему из двух нелинейных кристаллов ВВО длиной 3 мм, вырезанных в режиме коллинеарного частотно-вырожденного синхронизма типа-I, в компенсационной конфигурации. Расстояние между кристаллами может меняться от 7 до 170 мм посредством подвижной платформы, на которой располагается один из кристаллов. После

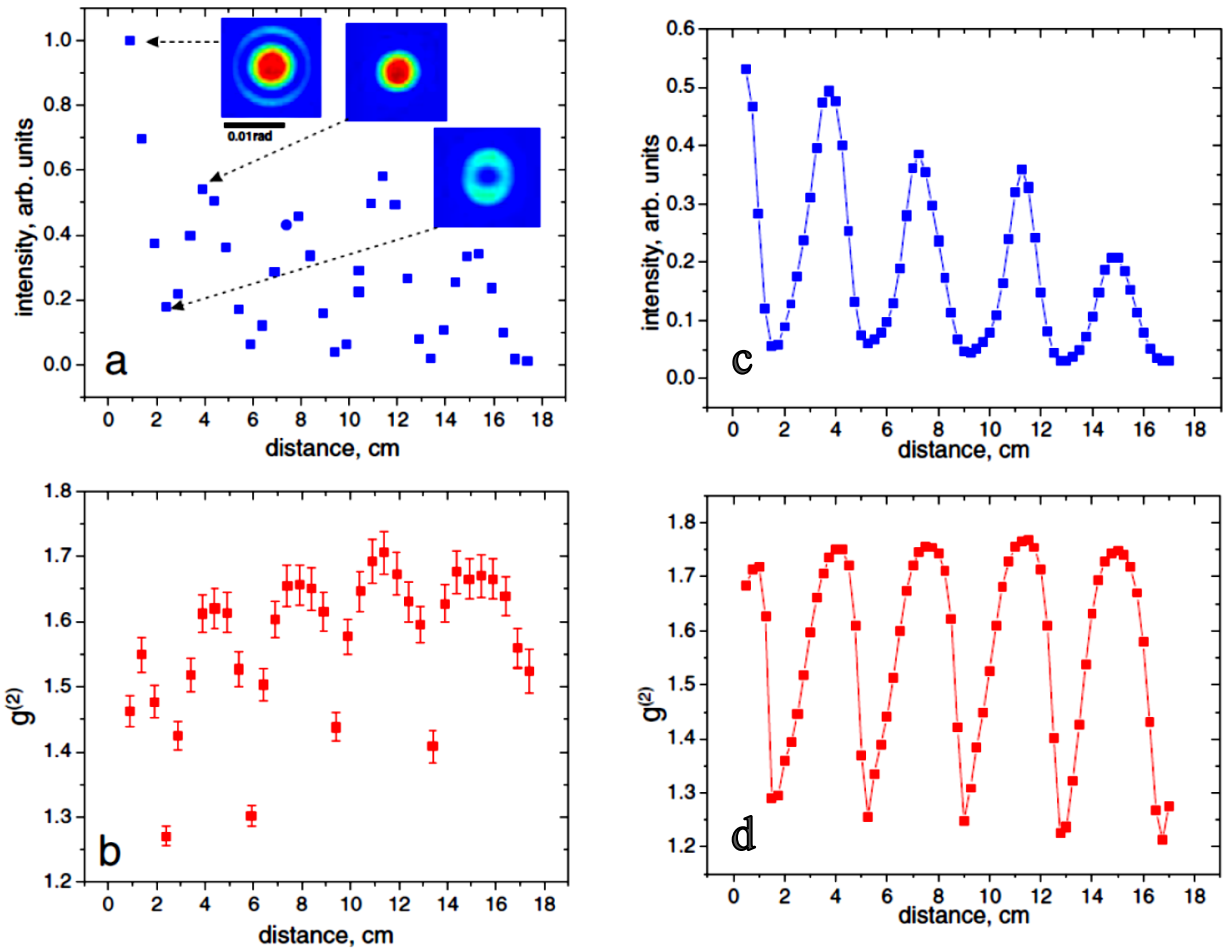
прохождения кристаллов излучение накачки устраняется дихроичным зеркалом (DM), а излучение сжатого вакуума претерпевает частотную фильтрацию посредством монохроматора. Монохроматор имеет полосу пропускания 0.1 нм, что достаточно для выделения  $m_t = 1.25$  частотных мод.



**Рисунок 2.8.** Экспериментальная установка для выделения одной пространственной моды.

Таким образом, с увеличением расстояния между кристаллами интегральная интенсивность, а также корреляционная функция второго порядка по интенсивности имеют осцилляционный характер с периодом осцилляций в 35 мм. Осцилляции обусловлены тем, что показатели преломления сигнального (холостого) пучков и пучка накачки в воздухе отличаются, их отличие весьма мало:  $\delta n \approx 1.016 \cdot 10^{-5}$ , однако этого достаточно для наблюдения интерференционной картины при длине воздушного зазора уже в несколько сантиметров. Отличие показателей преломления приводит к разному набегу фаз параметрического излучения и накачки в воздухе и, как следствие, интерференции между вкладками параметрического рассеяния от разных кристаллов. При этом пики корреляционной функции возрастают с увеличением расстояния между кристаллами и соответствуют пикам по интенсивности (минимумы корреляционной функции соответствуют минимумам интенсивности) (рисунок 2.9).





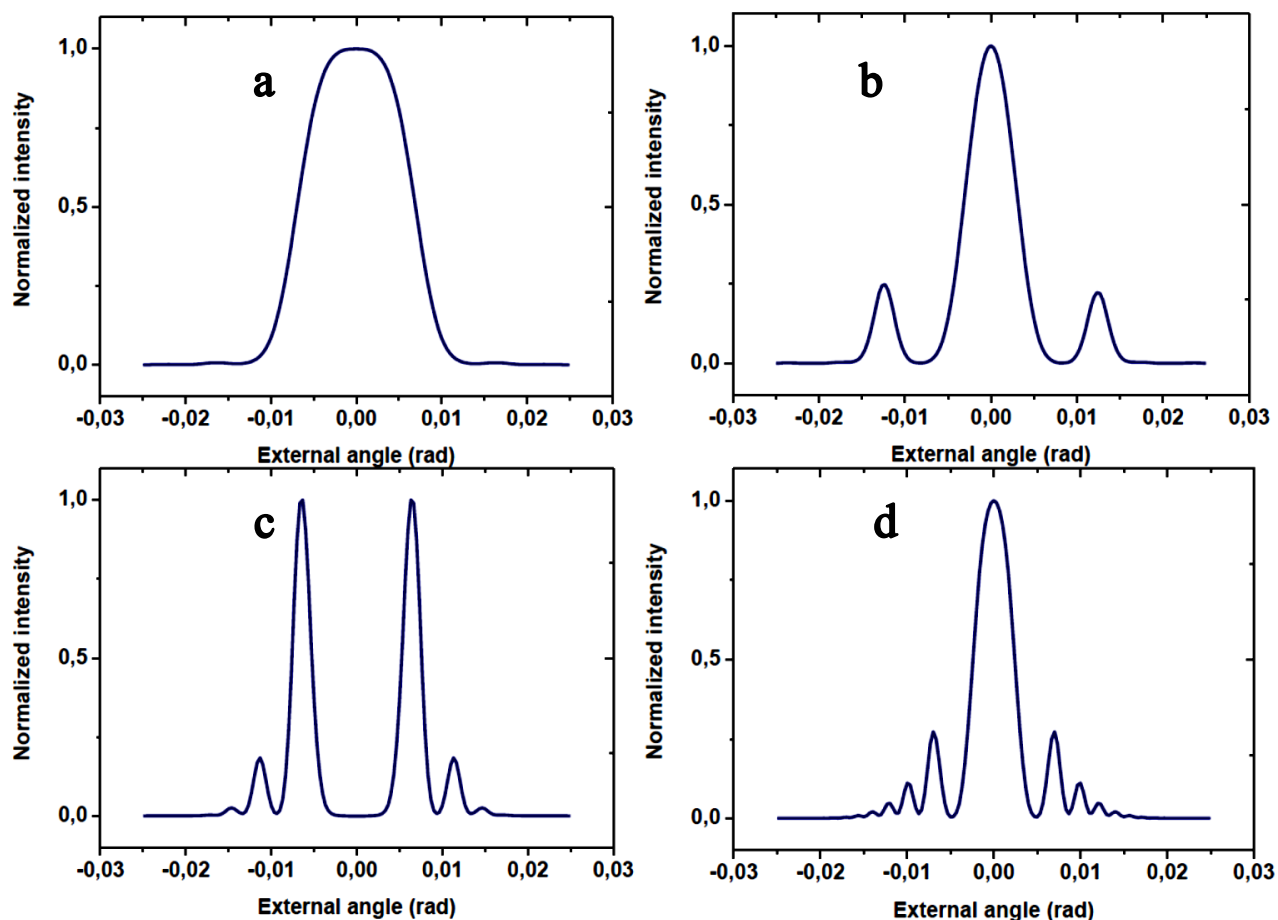
**Рисунок 2.9.** а,с) интегральная интенсивность и б,д) интегральная автокорреляционная функция второго порядка по интенсивности в зависимости от расстояния между кристаллами; а,б) экспериментальные данные, с,д) теоретические расчеты.

В точках максимума происходит конструктивная интерференция, набег фазы в данном случае равен нулю, профиль интенсивности близок к гауссовой форме, распределение собственных значений Шмидта достаточно резкое и становится все более и более резким при переходе к последующим точкам конструктивной интерференции (рисунок 2.11(а),(д)), что способствует выживанию малого числа мод при высоком значении коэффициента параметрического усиления. На рисунках 2.10(а),(д) изображены одномерные теоретические профили интенсивности для точек конструктивной интерференции: рисунок 2.10.(а) соответствует конфигурации кристаллов без воздушного зазора, рисунок 2.10(д) соответствует воздушному промежутку в 3.5 см (первая точка конструктивной интерференции). Как видно, с увеличением расстояния

между кристаллами угловой спектр сужается, что связано с уменьшением доли излучения от первого кристалла, попадающей во второй кристалл. Одновременно, с увеличением воздушного промежутка возникают боковые интерференционные пики, образующие некоторый пьедестал вокруг центрального пика и обусловленные присутствием в спектре излучения мод Шмидта высокого порядка, что хорошо видно из распределений весов Шмидта для различных точек конструктивной интерференции (рисунок 2.11(a),(d)). Однако по мере дальнейшего увеличения расстояния боковые пики становятся менее выраженными, что косвенно говорит о выделении одной пространственной моды. Экспериментальные двумерные профили интенсивности показаны на вставке рисунка 2.9(a) для точек как конструктивной, так и деструктивной интерференции. Что касается формы мод Шмидта, то в точках конструктивной интерференции первая мода Шмидта имеет характерный гауссоподобный профиль, вторая мода Шмидта характеризуется двумя симметричными относительно центра пиками и т. д., однако вес второй и последующих мод Шмидта меньше в сравнение с весом первой моды Шмидта, следовательно, сигнал также характеризуется максимумом в центре.

На рисунке 2.10(b) представлен одномерный профиль интенсивности для промежуточной точки, соответствующей расстоянию между кристаллами 0.5 см, на рисунке 2.11(b) соответствующее данной точке распределение весов Шмидта. Как видно, по мере увеличения набега фазы между накачкой и параметрическим излучением в воздухе боковые пики возрастают, а центральный пик просаживается и полностью исчезает в точке деструктивной интерференции, при этом вес второй моды Шмидта по мере увеличения расстояния между кристаллами возрастает и становится равным весу первой моды Шмидта в точке деструктивной интерференции. При дальнейшем увеличении расстояния между кристаллами наблюдается обратный процесс - усиление центрального пика и подавление боковых

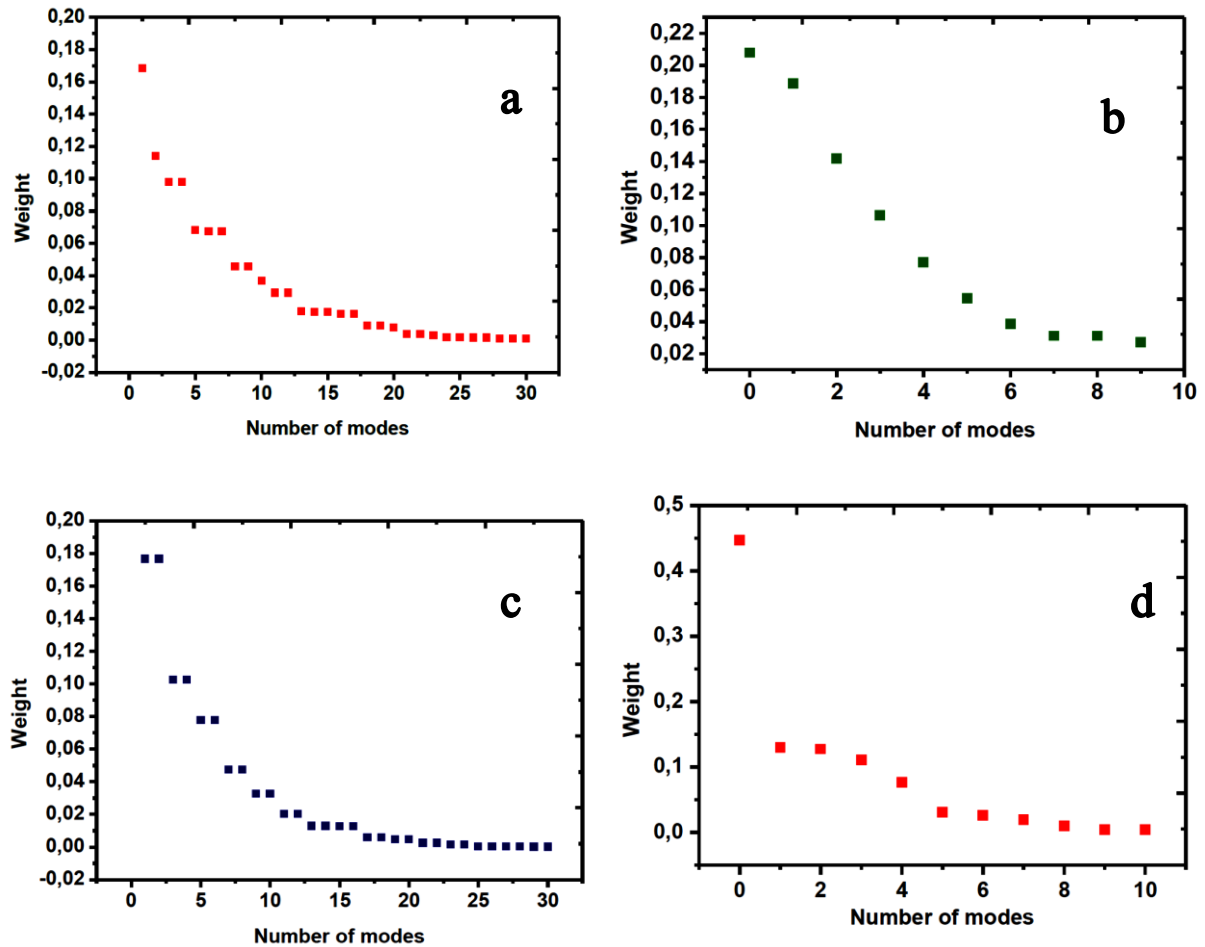
крыльев спектра до следующей точки конструктивной интерференции, затем цикл снова повторяется.



**Рисунок 2.10.** Нормированные одномерные профили интенсивности для различных расстояний между кристаллами: **a)** без воздушного промежутка, **b)** 0.5 см, **c)** 1.75 см (точка минимума интегрального сигнала), **d)** 3.5 см (точка максимума интегрального сигнала).

В точках минимума происходит деструктивная интерференция, в двумерном угловом распределении интенсивности наблюдаются кольца (вставка на рисунке 2.9(a)), в одномерном срезе углового распределения – два симметричных относительно коллинеарного направления вылета фотонов пика с минимумом интенсивности в центре (рисунок 2.10(c)), набег фазы в воздухе между накачкой и параметрическим излучением в данном случае равен  $\pi$ . Распределение коэффициентов Шмидта в случае деструктивной интерференции соответствует равновероятному заселению двух первых мод Шмидта (рисунок 2.11(c)), обладающих одинаковым профилем

интенсивности, но различной симметрией: первая мода является симметричной, вторая – антисимметричной. Такое распределение мод Шмидта приводит к минимуму корреляционной функции и присутствию в излучении двух мод даже при высоком значении коэффициента параметрического усиления, а характерные двухпиковые профили первых двух мод Шмидта фактически определяют форму сигнала.



**Рисунок 2.11.** Распределение коэффициентов Шмидта амплитуды бифотона для различных расстояний между кристаллами: **a)** без воздушного промежутка, **b)** 0.5 см, **c)** 1.75 см (точка минимума интегрального сигнала), **d)** 3.5 см (точка максимума интегрального сигнала).

При теоретическом вычислении корреляционной функции (рисунок 2.9 (b)) был учтен тот факт, что в излучении присутствует  $m_t = 1.25$  частотных мод (в эксперименте измеряется полное число пространственно-частотных мод), а также учтены два пространственных направления: анизотропное направление и направление без анизотропии (такое разбиение существенно

упрощает вычисления, практически не влияя на конечный результат, хотя количество полных двумерных мод может быть также найдено). Общее число пространственно-частотных мод в таком случае находится по приближенной формуле:  $M = m_t \times m_x \times m_y$ , где  $m_t$  – число частотных мод,  $m_x$  и  $m_y$  – число мод в анизотропном направлении и направлении без анизотропии соответственно, вычисленных по формуле:

$$m_{x,y} = K_{x,y} = \frac{1}{\sum_n \lambda'_n(x,y)^2}, \quad (2.56)$$

где  $K_{x,y}$  – параметр Шмидта,  $\lambda'_n(x,y)$  – перенормированные собственные значения в анизотропном направлении и направлении без анизотропии. В связи с учетом частотных мод корреляционная функция не достигает своего максимального значения, равного двум, в условиях данного эксперимента (рисунок 2.9 (b)), однако при рассмотрении только одной частотной моды теоретически было продемонстрировано достижение корреляционной функцией максимального значения, что говорит о возможности выделения в данном эксперименте одной пространственной моды посредством лучшей фильтрации частотных мод.

Стоит отметить, что во всех точках с одинаковым набегом фаз моды Шмидта имеют подобный профиль, однако ширина мод Шмидта уменьшается, то есть помимо редукции числа мод наблюдается также сужение самих мод, как следствие, сужается сам сигнал. При этом заселенность первой моды в каждой последующей точке максимума становится выше (рисунок 2.11 (a),(d)), в связи с чем идет тенденция к выделению одной пространственной моды при увеличении расстояния между кристаллами в режиме высокого значения коэффициента параметрического усиления. Однако после достижения максимального значения, соответствующего четвертому пику для данной экспериментальной конфигурации, корреляционная функция уменьшается как в теоретической,

так и в экспериментальной зависимости. Данный факт объясняется тем, что, хотя в каждой точке конструктивной интерференции (пик  $g^{(2)}$ ) наблюдается достаточно явный пик гауссовой формы, одновременно с ним также присутствует некоторый фон, обусловленный неинтерферирующей частью излучения. При больших расстояниях между кристаллами  $L$  значение корреляционной функции в максимумах снижается за счет увеличения удельного веса фона, что в свою очередь, приводит к уменьшению веса первой моды Шмидта и увеличению числа эффективных мод. Такая ситуация наблюдается как в теории, так и в эксперименте после четвертого пика (рисунок 2.9(b),(d)). Таким образом, для выбранных параметров эксперимента существует некоторое оптимальное расстояние между кристаллами, соответствующее выделению одной пространственной моды. Также стоит отметить, что теория предсказывает монотонное снижение огибающей интенсивности интегрального сигнала при увеличении расстояния между кристаллами, в то время как в эксперименте заметно некоторое ее увеличение при  $L=11$  см. Данный факт объясняется тем, что точка  $L=11$  см близка к перетяжке пучка, в то время как в теории используется постоянное значение диаметра накачки.

## 2.5. Проявление эффекта анизотропии.

Эффект пространственного (поперечного) сноса обусловлен тем, что в общем случае для необыкновенно поляризованной накачки направление вектора Умова-Пойнтинга  $\mathbf{S}_p$  и волнового вектора внутри кристалла  $\mathbf{k}_p$  не совпадают (рисунок 2.12): при нормальном падении накачки на кристалл волновой вектор внутри кристалла имеет то же направление, что и снаружи, в то время как вектор распространения энергии (вектор Умова-Пойнтинга) меняет свое направление согласно законам распространения света в двулучепреломляющих кристаллах. Эффектом пространственного сноса

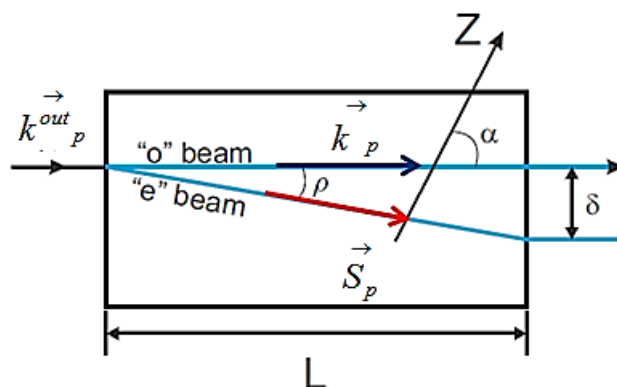
нельзя пренебрегать в случае узкой накачки и длинных кристаллов, однако для генерации сжатого вакуума с большим числом фотонов на моду при фиксированной мощности накачки следует выбирать как можно более длинные кристаллы. Таким образом, эффект пространственного сноса, как правило, играет паразитирующую роль, доставляя различные неудобства, для его устранения используют компенсационную схему, включающую два нелинейных кристалла с оптическими осями, находящимися в одной плоскости, но под симметричными углами к направлению распространения накачки, что позволяет на удвоенной длине кристалла избежать эффекта пространственного сноса. Однако пространственный снос может выполнять чрезвычайно полезную роль, так как может быть использован для генерации высокоинтенсивных скоррелированных пучков близнецов [5,7]

### **2.5.1. Пространственное распределение интенсивности и модовая структура нелинейного сигнала.**

Эффект пространственного сноса нарушает цилиндрическую симметрию амплитуды бифотона, что не позволяет рассматривать задачу в цилиндрических координатах. Однако в случае пространственного сноса направление анизотропии является превалирующим и отражает все основные черты генерируемого излучения, поэтому для описания эффектов анизотропии достаточно рассмотреть только это направление, одномерная амплитуда бифотона для одного анизотропного кристалла в таком случае имеет вид [103,104]:

$$F(\theta_s, \theta_i) = \exp \left[ -\frac{\sigma^2 (\Delta_{\perp} \cos \rho + \Delta_{\parallel} \sin \rho)^2}{2} \right] \exp \left[ -i \frac{L}{2} \xi \right] \operatorname{sinc} \left[ \frac{L}{2} \xi \right], \quad (2.57)$$

где поперечная отстройка  $\Delta_{\perp} = k_s \sin \theta_s + k_i \sin \theta_i$ , продольная отстройка  $\Delta_{\parallel} = k_p - k_s \cos \theta_s - k_i \cos \theta_i$ ,  $\xi = \Delta_{\parallel} - \Delta_{\perp} \tan \rho$ ,  $\rho$  – угол сноса (рисунок 2.12).



**Рисунок 2.12.** Необыкновенно поляризованная накачка падает нормально на кристалл длины  $L$  с оптической осью  $Z$ , находящейся под углом  $\alpha$  к направлению распространения накачки. За счет эффекта пространственного сноса на выходе из кристалла накачка сносится на расстояние  $\delta$ .

Как видно, амплитуда бифотона симметрична относительно замены сигнальных переменных на холостые, что, в свою очередь, говорит о симметрии мод Шмидта (симметричные и антисимметричные моды) даже в случае двухпикового сигнала и принципиальной невозможности в итоговом распределении интенсивности отделить сигнальное излучение от холостого. Таким образом, как только произведена факторизация амплитуды бифотона и выделено направление анизотропии, в котором амплитуда бифотона зависит только от двух переменных: углов вылета сигнального и холостого фотонов  $\theta_s, \theta_i$ , становится возможным произвести разложение Шмида амплитуды бифотона, ввести моды Шмидта в декартовой системе координат, а также применить метод, описанный в разделе 2.2.2.

Стоит отметить, что проявление пространственного сноса в случае сильного и слабого коэффициента параметрического излучения (гейна) чрезвычайно различно: в то время как при низком гейне снос приводит только к асимметрии углового спектра и увеличению числа мод [104], при высоком гейне он может создавать два отдельных пика в угловом распределении интенсивности в геометрии, где ожидается коллинеарное параметрическое рассеяние [103].

В эксперименте и теоретических расчетах использовались следующие параметры: накачка с шириной на половине высоты по интенсивности 35



мкм фокусировалась на два нелинейных кристалла ВВО длиной 1 мм в режиме коллинеарного частотно вырожденного синхронизма типа I с воздушным зазором 8 мм. Амплитуда бифотона для случая нескомпенсированной анизотропии (оптические оси кристаллов параллельны друг другу) имеет вид:

$$\begin{aligned}
 F(\theta_s, \theta_i) = & \exp \left[ -\frac{\sigma^2 (\Delta_{\perp} \cos \rho + \Delta_{\parallel} \sin \rho)^2}{2} \right] \exp \left[ -i \frac{L}{2} \xi \right] \operatorname{sinc} \left[ \frac{L}{2} \xi \right] \\
 & + \exp \left[ -\frac{\sigma^2 (\Delta_{\perp} \cos \rho + \Delta_{\parallel} \sin \rho)^2}{2} \right] \exp \left[ -i \frac{L}{2} \xi \right] \operatorname{sinc} \left[ \frac{L}{2} \xi \right] \exp [i(L\Delta_{\parallel} \\
 & + d\Delta_{\parallel}^{air})] \quad (2.58)
 \end{aligned}$$

В случае скомпенсированной анизотропии (оптические оси кристаллов находятся под симметричными углами относительно направления распространения накачки) амплитуда бифотона имеет вид:

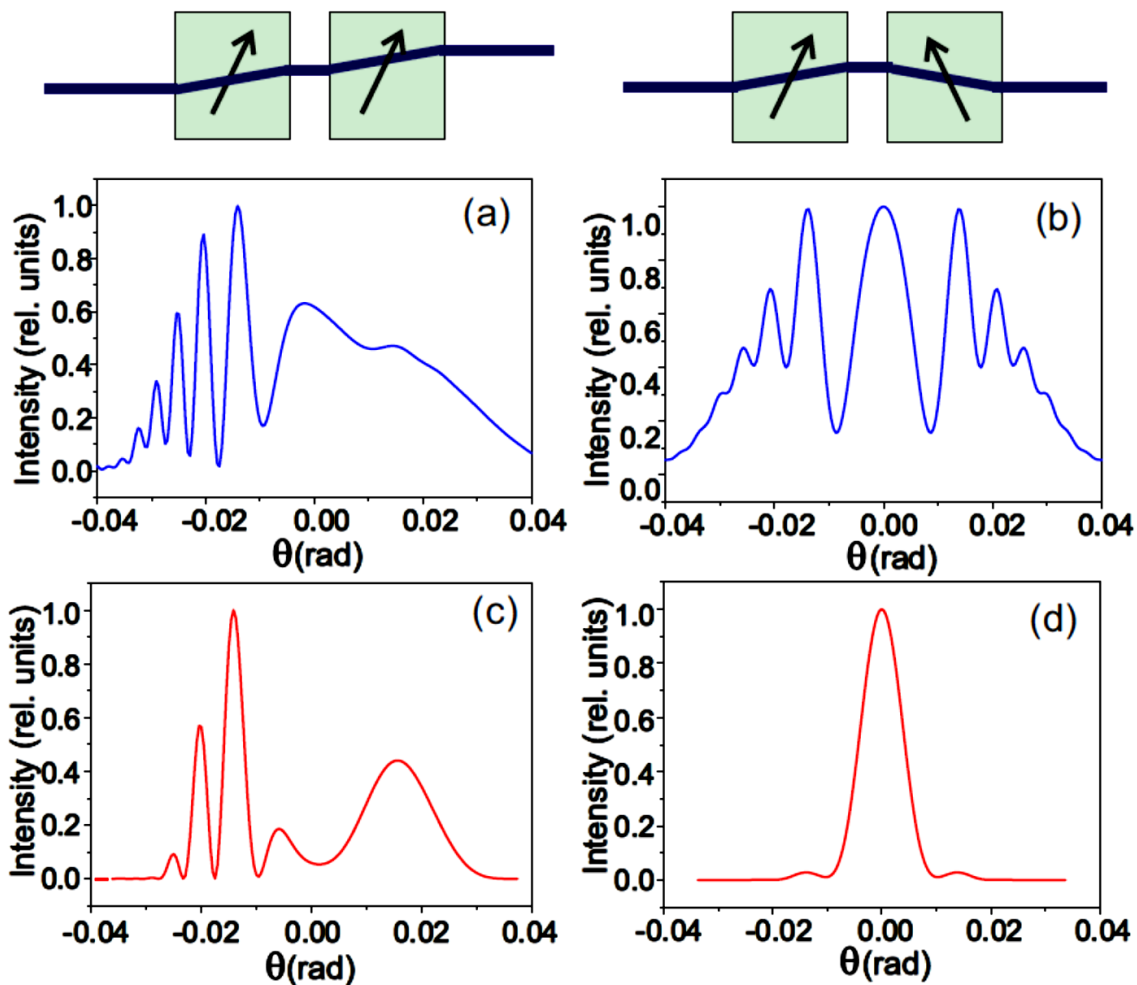
$$\begin{aligned}
 F(\theta_s, \theta_i) = & \exp \left[ -\frac{\sigma^2 (\Delta_{\perp} \cos \rho + \Delta_{\parallel} \sin \rho)^2}{2} \right] \exp \left[ -i \frac{L}{2} \xi \right] \operatorname{sinc} \left[ \frac{L}{2} \xi \right] \\
 & + \exp \left[ -\frac{\sigma^2 (\Delta_{\perp} \cos \rho - \Delta_{\parallel} \sin \rho)^2}{2} \right] \exp \left[ i \frac{L}{2} \eta \right] \operatorname{sinc} \left[ \frac{L}{2} \eta \right] \exp [i(L\Delta_{\parallel} \\
 & + d\Delta_{\parallel}^{air})] \quad (2.59)
 \end{aligned}$$

где  $\eta = \Delta_{\parallel} + \Delta_{\perp} \tan \rho$ ,  $\Delta_{\parallel}^{air} = k_p^{air} - k_s^{air} \cos(n_s \theta_s) - k_i^{air} \cos(n_i \theta_i)$  – продольная отстройка в воздушном зазоре.

При низком коэффициенте параметрического усиления и одинаковой ориентации оптических осей в кристаллах эффект пространственного сноса приводит к сильной асимметрии спектра излучения, в то время как, наложение излучения, приходящего от двух кристаллов, создает интерференционную структуру (рисунок 2.13(a)). Интерференция выражена более явно в направлении, симметричном направлению сноса. Данный факт объясняется следующим образом: так как излучение вдоль направления вектора Умова-Пойнтинга (сигнальное излучение), а также в симметричном

ему направлению согласно условию фазового синхронизма (холостое излучение) неразлично, то усиление происходит в каждой точке вдоль направления вектора Умова-Пойнтинга, а также в указанном симметричном направлении с той лишь разницей, что холостое излучение одинаковой интенсивности генерируется в различных, но коллинеарных направлениях в каждой точке по мере распространения излучения в кристалле, в то время как сигнальное излучение генерируется в одном и том же направлении в каждой точке по мере распространения излучения. Таким образом возникает эффект наведенной когерентности, ведущий к образованию интерференционной структуры. Использование конфигурации скомпенсированной анизотропии приводит к симметризации спектра относительно направления коллинеарного вылета фотонов, но не исключает интерференцию (рисунок 2.13(b)).

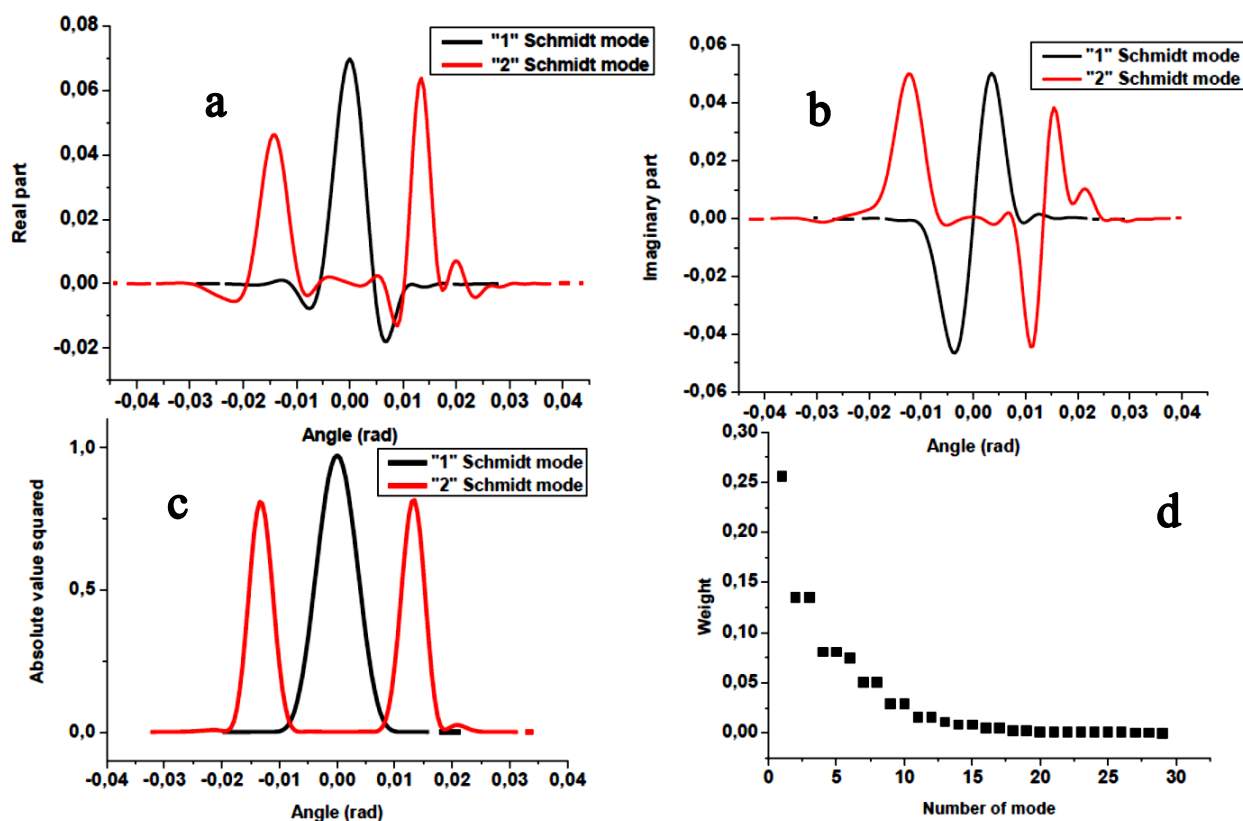
При высоком значении коэффициента параметрического усиления (рисунки 2.13(c) и 2.13(d)), спектр излучения, получаемый от двух кристаллов с параллельной ориентацией оптических осей в режиме коллинеарного вырожденного синхронизма, имеет два пика, что обусловлено усилением излучения в нелинейном кристалле при интенсивной накачке преимущественно вдоль направления вектора Умова-Пойнтинга накачки, а также в симметричном ему направлении за счет выполнения условия фазового синхронизма (в направлении пучка близнеца). В случае конфигурации скомпенсированной анизотропии при высоком коэффициенте параметрического усиления интерференционная структура больше не наблюдается, усиление происходит в коллинеарном волновому вектору накачки направлении, излучение характеризуется цилиндрической симметрией, эффект анизотропии не проявляется.



**Рисунок 2.13.** Угловые теоретические спектры от двух кристаллов в конфигурации нескомпенсированной (a,c) и скомпенсированной (b,d) анизотропии для двух различных значений коэффициента параметрического усиления: (a,b)  $G = 10^{-4}$ , (c,d)  $G = 10$ . Сверху также показаны конфигурации кристаллов.

С точки зрения мод Шмидта ситуация объясняется следующим образом. Так как амплитуда бифотона в общем случае комплексна, то моды Шмидта в общем случае также комплексны, тем не менее, собственные значения разложения Шмидта всегда действительны. В случае конфигурации скомпенсированной анизотропии (рисунок 2.14) разложение Шмидта устроено таким образом, что максимальную заселенность имеет мода, форма которой (модуль в квадрате) близка к гауссовой, поэтому при увеличении коэффициента параметрического усиления перенормированный вес такой моды будет становиться все больше, интерференционная структура спектра,

обусловленная добавлением мод Шмидта с большим номером, будет исчезать.

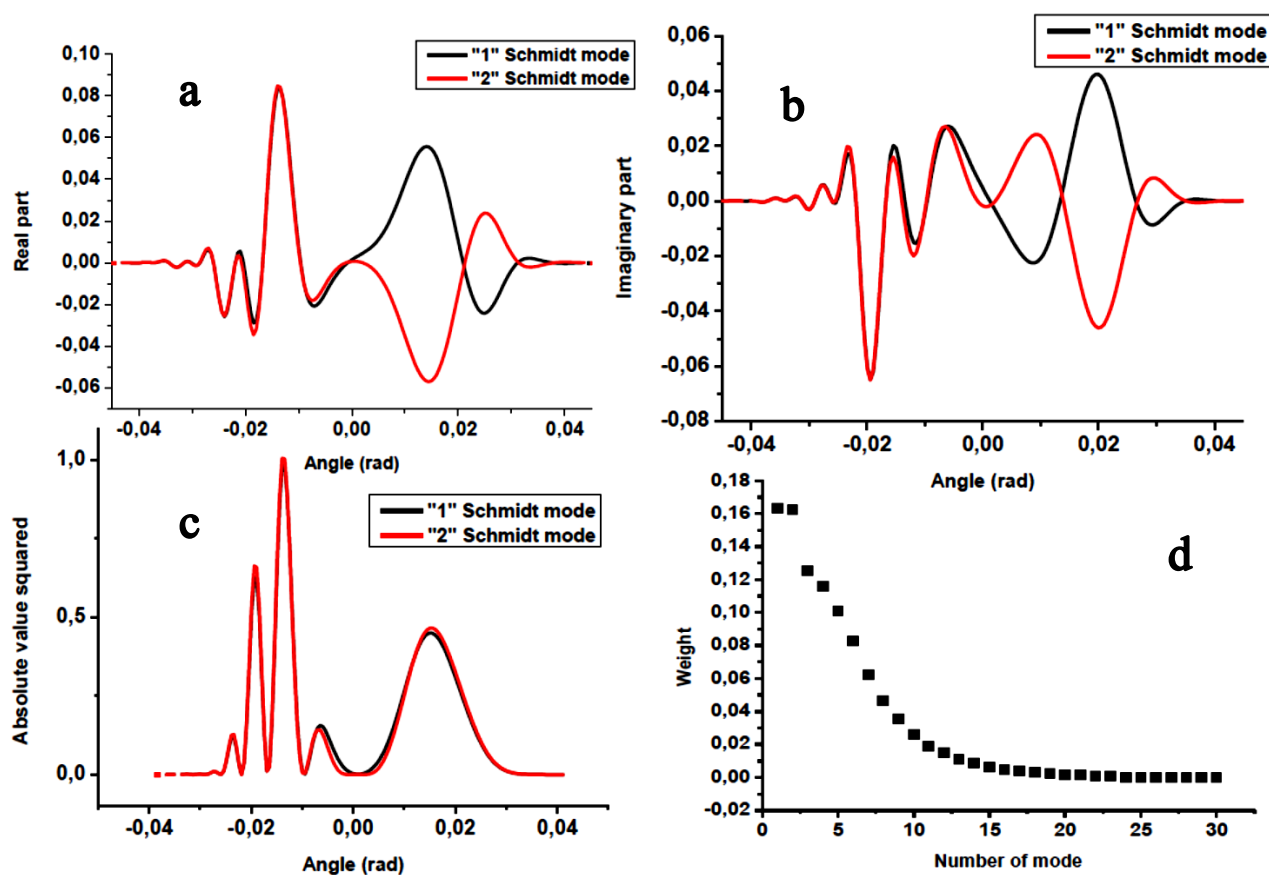


**Рисунок 2.14.** Моды Шмидта и их веса в случае скомпенсированной анизотропии: **a)** действительная часть, **b)** мнимая часть, **c)** квадрат модуля мод Шмидта, черная кривая соответствует первой моде Шмидта, красная – второй; **d)** распределение весов мод Шмидта от номера моды.

Следовательно, компенсационная схема двух кристаллов может быть рассмотрена как кристалл удвоенной длины без эффекта анизотропии. Действительная и мнимая части мод Шмидта при этом не характеризуются какой-либо симметрией, однако модули мод Шмидта являются симметричными функциями относительно начала координат, как следствие сигнал, который зависит только от квадратов модулей мод Шмидта будет также обладать симметрией относительно направления волнового вектора накачки.

В случае нескомпенсированной (рисунок 2.15) анизотропии первая и вторая моды Шмидта имеют одинаковую заселенность, это значит, что даже при высоком значении коэффициента параметрического усиления в системе

будут присутствовать две моды. При этом как первая, так и вторая моды Шмидта имеют двухпиковую форму: интерференционный и гладкий пики, хотя действительная и мнимая части этих мод различны, квадраты модулей первой и второй мод Шмидта совпадают. Таким образом, даже в случае двухпикового сигнала невозможно отделить сигнальные переменные от холостых и интерпретировать один пик как сигнальный, второй как холостой - оба пика являются одновременно и сигнальными, и холостыми, что отражает свойство симметрии амплитуды бифотона относительно замены сигнальных переменных на холостые.



**Рисунок 2.15.** Моды Шмидта и их веса в случае некомпенсированной анизотропии: **a)** действительная часть, **b)** мнимая часть, **c)** квадрат модуля мод Шмидта, черная кривая соответствует первой моде Шмидта, красная – второй; **d)** распределение весов мод Шмидта от номера моды.

В случае низкого коэффициента параметрического усиления (гейна) веса мод Шмидта отличаются незначительно, поэтому в итоговый сигнал вносит вклад большое количество мод Шмидта, что приводит к широкому однопиковому сигналу, изрезанному интерференцией в случае низкого гейна.

При увеличении коэффициента параметрического усиления все меньшее число мод Шмидта вносит вклад в итоговое распределение интенсивности, вклад первых двух мод становится все более и более существенным, за счет чего сигнал приобретает двухпиковую форму при высоком коэффициенте параметрического усиления, что было продемонстрировано экспериментально в работе [103]. Стоит отметить, что в конфигурации без анизотропии в случае как низкого, так и высокого гейна наблюдается один пик в итоговом сигнале.

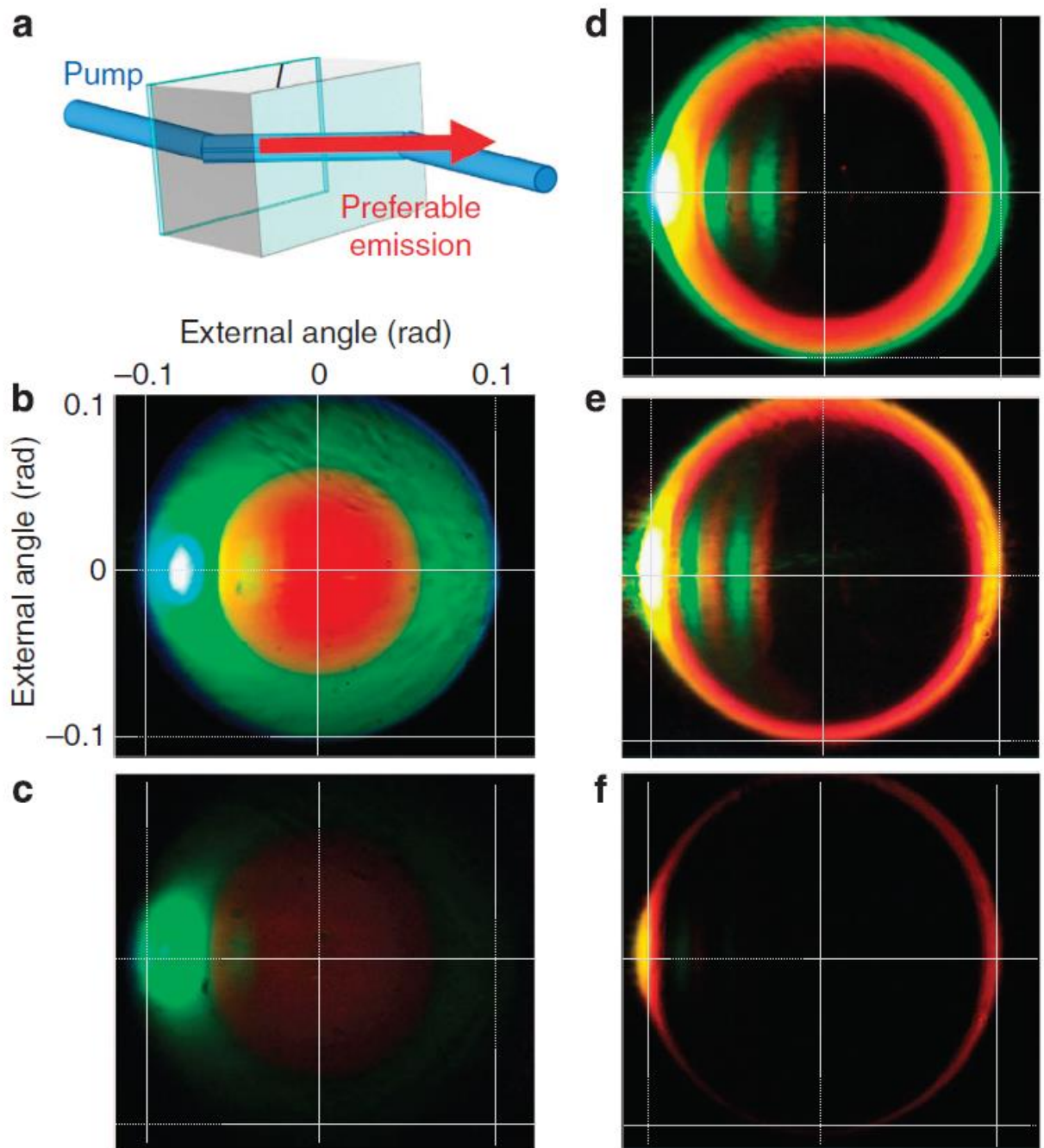
Таким образом, эффект анизотропии существенно различно проявляется в режиме сильного и слабого коэффициента параметрического усиления, играет, как правило, деструктивную роль и является весьма нежелательным с точки зрения эксперимента. Однако эффект анизотропии может выполнять весьма полезную роль и является основополагающим при генерации высокоинтенсивных скоррелированных пучков близнецов.

### **2.5.2. Генерация высокоинтенсивного излучения за счет эффекта пространственного сноса.**

Для лучшего наблюдения эффекта пространственного сноса необходимо использовать длинный кристалл и достаточно узкую накачку, поэтому в теоретических расчетах, а также в эксперименте был использован ВВО кристалл длиной 5 мм, накачка (третья гармоника YAG:Nd, длина волны 355 нм, длительность импульса 18 пс, частота повторения 1 кГц) фокусировалась до размера 60 микрон на половине высоты по интенсивности. Кристалл был ориентирован для реализации частотно вырожденного коллинеарного синхронизма типа-I (реализуется при ориентации кристалла под углом  $32.97^\circ$  по отношению к оптической оси, оптическая ось кристалла, направление накачки и вектор Умова-Пойнтинга показаны на рисунке 2.16(a)). После прохождения кристалла накачка

исключалась дихроичным зеркалом, а параметрическое излучение фиксировалось при помощи ССD камеры.

При наблюдении коллинеарного частотно вырожденного синхронизма типа-I условие фазового синхронизма выполняется для вырожденной длины волны 710 нм (красный цвет), поэтому в спектре интенсивности в данном случае наблюдается максимум для красного цвета для направления коллинеарного вылета фотонов параметрического излучения (рисунок 2.16(b)). В то же время виден яркий пик в зеленой области спектра, соответствующий направлению, симметричному направлению вектора Умова-Пойнтинга. Белое пятно на рисунке 2.16(b) - не что иное как насыщение камеры за счет высокой интенсивности излучения, поставив перед камерой нейтральный фильтр, можно убедиться в том, что пик принадлежит именно зеленой области спектра (рисунок 2.16(c)). На самом же деле, зеленый пик – только один из пары высокоинтенсивных пучков близнецов, его симметричный близнец согласно условию фазового синхронизма для данного угла и закону сохранения энергии находится в инфракрасной области спектра, поэтому не фиксируется камерой. При повороте кристалла условие фазового синхронизма для излучения, генерируемого в направлении вектора Умова-Пойнтинга, будет выполняться для другой длины волны, на другой длине волны будет генерироваться и симметричный пучок-близнец: на желтой длине волны (рисунок 2.16(d)), на оранжевой длине волны (рисунок 2.16(e)) и наконец, на красной длине волны (рисунок 2.16(f)). Таким образом, по мере поворота кристалла происходит разгорание симметричного пучка близнеца, и на рисунке 2.16(f) уже видны два симметричных пика в красной области спектра.



**Рисунок 2.16.** Ярко выраженное усиление интенсивности вдоль направления вектора Умова-Пойнтинга накачки в кристалле. **a)** схематическое изображение кристалла и оптической оси. **b-f)** профили интенсивности на CCD камере при различных ориентациях кристалла: **b,c)**  $32.97^\circ$ , **b)** – без фильтра, **c)** – с нейтральным фильтром **d)**  $33.4^\circ$ , **e)**  $33.7^\circ$ , **f)**  $34^\circ$ . Масштаб на всех фотографиях одинаков, дополнительные полосы на рисунках 2.16(d,e) обусловлены отражением от граней кристалла. Наибольшую интенсивность имеет излучение, генерируемое в направлении угла сноса, а также в симметричном ему направлении согласно условию фазового синхронизма, эффект наблюдается при различных ориентациях кристалла, однако для каждой ориентации генерация высокоинтенсивного излучения идет на своей длине волны согласно частотно-угловой диаграмме.

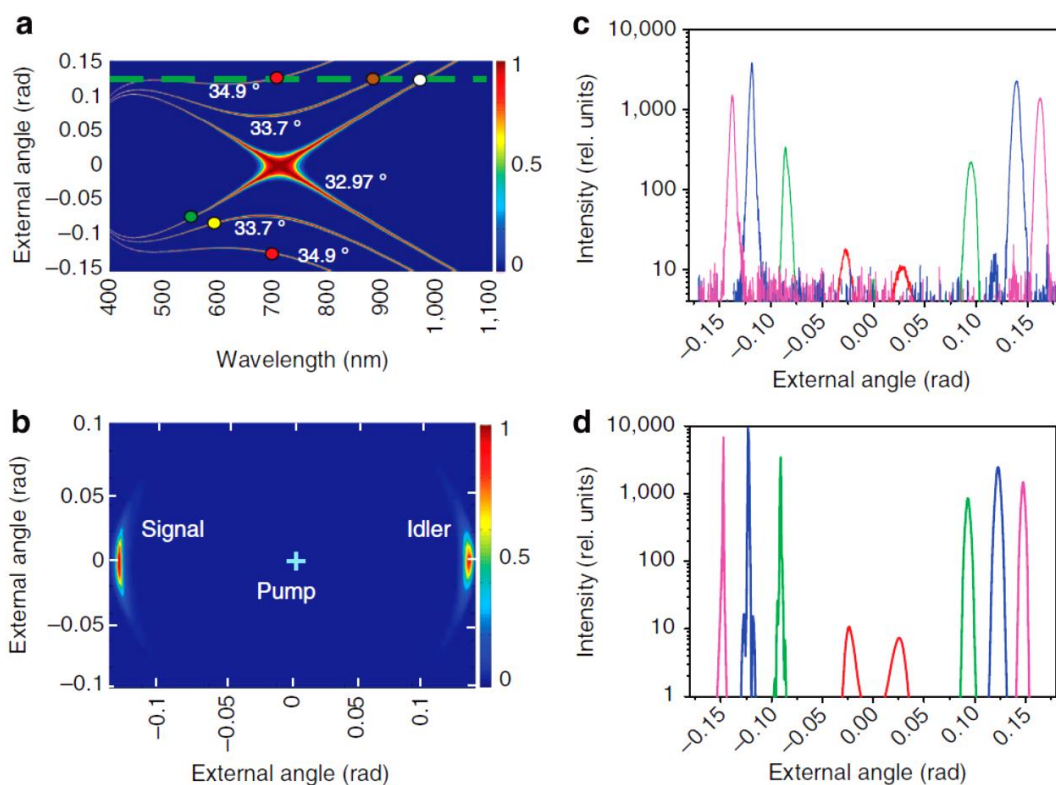


Лучше понять происходящее помогает диаграмма синхронизма для углов – длин волн (рисунок 2.17(a)), где угол, соответствующий направлению вектора Умова-Пойнтинга, обозначен зеленой пунктирной линией. Так, для коллинеарного частотно вырожденного синхронизма ( $32.97^\circ$ ) в направлении вектора Умова-Пойнтинга генерируется высокоинтенсивное инфракрасное излучение (белая точка), в то время как симметричный ему пучок генерируется на зеленой длине волны. При повороте кристалла и его ориентации в  $33.7^\circ$  относительно оптической оси в направлении вектора Умова-Пойнтинга генерируется инфракрасное излучение на другой длине волны (коричневая точка), его симметричный близнец генерируется на желтой длине волны (желтая точка, 590 нм). И наконец, при ориентации кристалла в  $34.9^\circ$  относительно оптической оси излучение, генерируемое в направлении вектора Умова-Пойнтинга, становится видимым в красном диапазоне длин волн (красная точка вверху, 710 нм), его симметричный близнец также генерируется на красной длине волны (красная точка внизу).

Таким образом, при изменении ориентации кристалла относительно оптической оси показатель преломления накачки внутри кристалла меняется согласно закону:

$$n_p = \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_o^2 \sin^2 \alpha + n_e^2 \cos^2 \alpha}} \quad (2.60)$$

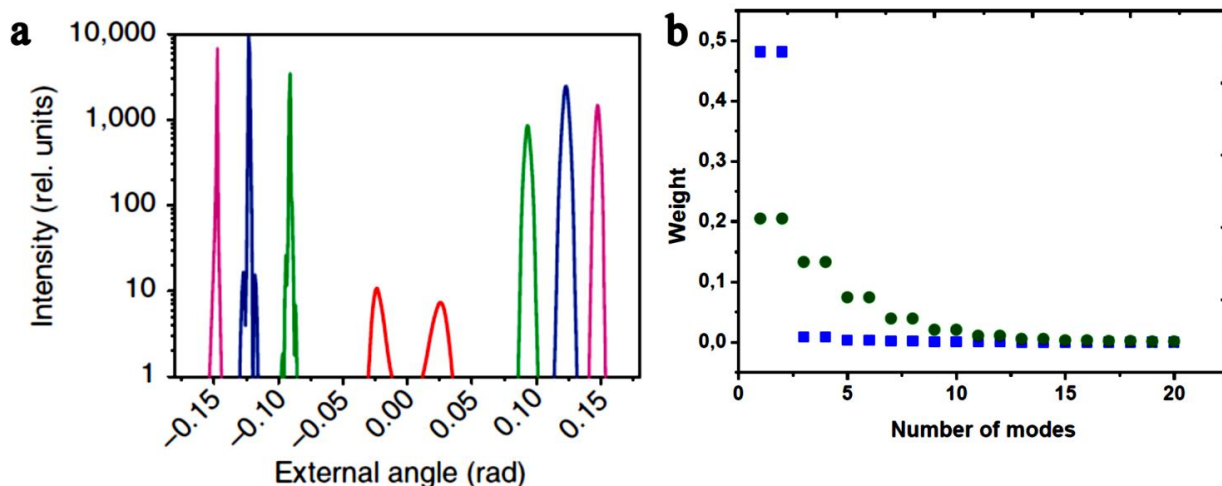
где  $n_o$ ,  $n_e$  – показатели преломления для обыкновенной и необыкновенной волны накачки соответственно. Как следствие, условие фазового синхронизма для параметрического излучения, генерируемого при угле сноса, начинает выполняться для других длин волн. Однако только при угле поворота в  $34.9^\circ$  оба пучка близнеца могут восприниматься камерой, так как излучение переходит в красный видимый диапазон.



**Рисунок 2.17.** Гигантское усиление пучков близнецов вдоль направления пространственного сноса и симметричном ему направлении согласно условию фазового синхронизма. **а)** диаграмма угол-длина волны для параметрического излучения, генерируемого накачкой 355 нм в кристалле ВВО длиной 5 мм в условиях фазового синхронизма I-типа, зеленая пунктирная линия соответствует углу сноса. **б)** двумерное распределение интенсивности параметрического излучения при высоком коэффициенте параметрического усиления: кольцо, характерное для низкого гейна (режим генерации бифотонных пар) вырождается в два симметричных высокоинтенсивных, слабо расходящихся пучка. **с)** экспериментальные и **д)** теоретические одномерные профили интенсивности для фиксированной длины волны параметрического излучения 710 нм при различных углах поворота кристалла: 33° (красный) 34° (зеленый) 34.9° (синий) 36° (фиолетовый). Небольшое угловое смещение правых экспериментальных пиков обусловлено большим (до 10°) поворотом кристалла.

При фиксации длины волны параметрического излучения и изменении ориентации кристалла относительно оптической оси можно наблюдать изменение формы спектра параметрического излучения и постепенное разгорание двух ярких симметричных пиков (рисунок 2.17.(с),(д)). Так, в условиях коллинеарного частотно-вырожденного синхронизма типа-I и накачки 355 нм для вырожденной длины волны 710 нм имеет место максимум интенсивности в центре (при нулевых углах) углового распределения (рисунок 2.16.(б)). При повороте кристалла и отстройке от

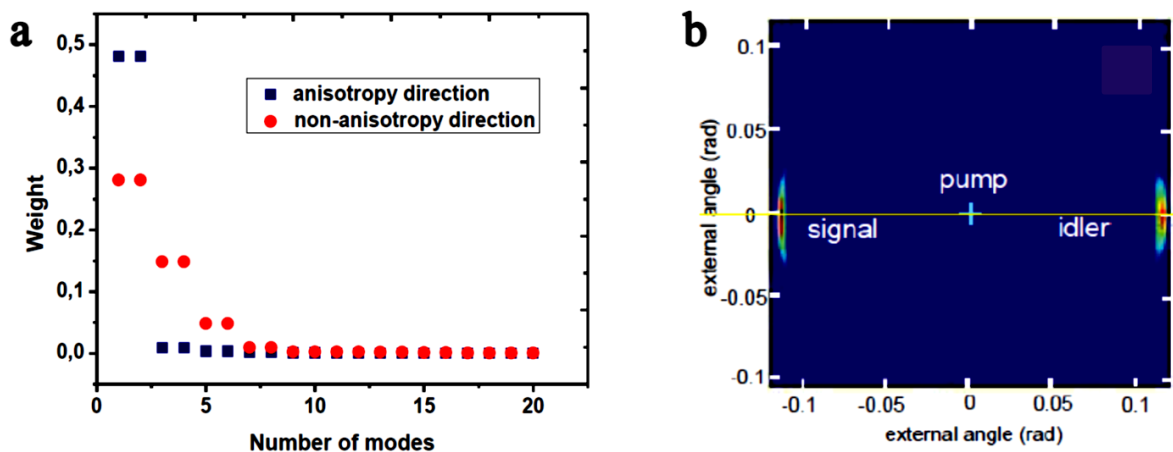
коллинеарного синхронизма в центре распределения интенсивности наблюдается минимум, спектр параметрического излучения имеет форму кольца (рисунок 2.16(d)-(f)), радиус которого тем больше, чем больше отстройка кристалла от коллинеарного синхронизма. На рисунке 2.17 представлены одномерные теоретические (рисунок 2.17(d)) и экспериментальные (рисунок 2.17(c)) спектры сжатого вакуума для вырожденной длины волны 710 нм в плоскости анизотропии в логарифмическом масштабе при различных углах поворота кристалла относительно оптической оси. По мере отстройки кристалла от режима коллинеарного синхронизма пик в центре расщепляется на два пика, интенсивность которых увеличивается в разы при увеличении угла поворота кристалла. При угле поворота в  $34.9^\circ$  условие фазового синхронизма для вырожденной длины волны выполняется при угле сноса, поэтому при такой ориентации кристалла интенсивность пиков достигает максимального значения; по сравнению с режимом коллинеарного синхронизма интенсивность возрастает на два-три порядка. При дальнейшем увеличении угла поворота кристалла относительно оптической оси интенсивность пиков начинает снижаться. Таким образом, излучение максимальной интенсивности в кристалле генерируется при выполнении условия фазового синхронизма для данной длины волны на угле сноса, при этом высокоинтенсивное излучение генерируется вдоль направления вектора Умова-Пойнтинга, а также в симметричном ему направлении согласно условию фазового синхронизма. С точки зрения мод Шмидта такая ситуация связана с распределением собственных значений (рисунок 2.18): при увеличении угла поворота кристалла распределение весов коэффициентов Шмидта становится более резким, а значит, в режиме высокого значения коэффициента параметрического усиления согласно перенормировке собственных значений интенсивность сигнала при более резком распределении будет выше.



**Рисунок 2.18.** а) теоретические одномерные профили интенсивности для фиксированной длины волны параметрического излучения 710 нм при различных углах поворота кристалла:  $33^\circ$  (красный)  $34^\circ$  (зеленый)  $34.9^\circ$  (синий)  $36^\circ$  (фиолетовый) и б) соответствующие им распределения коэффициентов Шмидта:  $34^\circ$  (зеленые точки)  $34.9^\circ$  (синие точки). Распределение весов Шмидта для угла сноса является более резким, что приводит к значительному увеличению интенсивности сигнала для такой ориентации кристалла в режиме высокого коэффициента параметрического усиления.

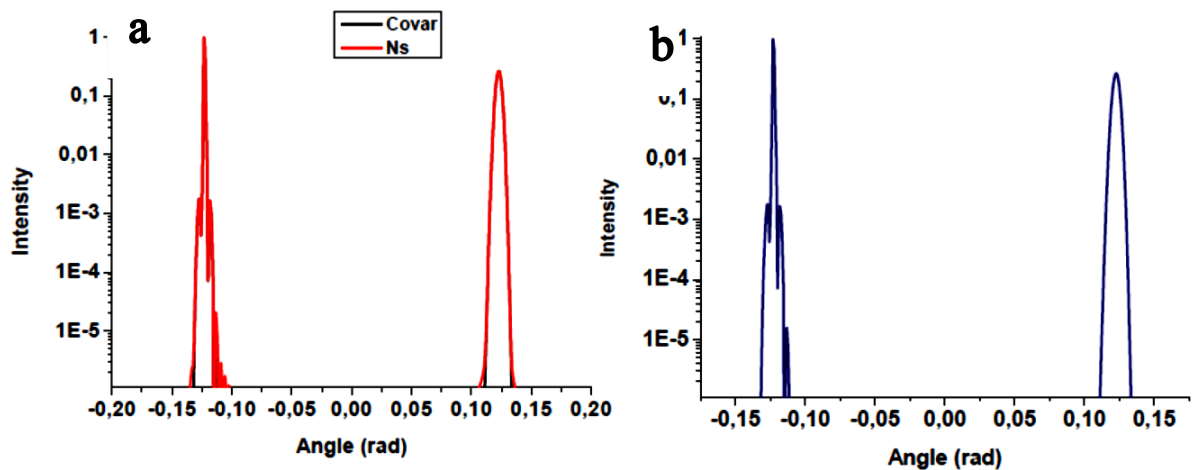
Кроме того, в режиме высокоинтенсивной накачки при выполнении условия фазового синхронизма для угла сноса кольцо, наблюдаемое в режиме слабой накачки, вырождается в два симметричных пучка (рисунок 2.19). Такой эффект также имеет простое объяснение с точки зрения мод Шмидта, если рассмотреть распределение мод Шмидта амплитуды бифотона в плоскости анизотропии и в перпендикулярной ей плоскости без анизотропии. На рисунке 2.19(а) показано двумерное распределение интенсивности, желтой линией отмечено направление анизотропии, на рисунке 2.19(б) представлены распределения весов Шмидта для анизотропного направления и направления без анизотропии. Как видно, распределение весов Шмидта для анизотропного направления является более резким, а это значит, что при увеличении коэффициента параметрического усиления веса мод Шмидта с малым номером для анизотропного направления будут больше по сравнению с весами мод Шмидта тех же номеров, но в направлении без анизотропии. Таким образом, при увеличении интенсивности накачки сигнал в анизотропном направлении будет

превалировать над сигналом в направлении без анизотропии согласно закону гиперболического синуса в квадрате (2.50), то есть кольцо параметрического излучения будет вырождаться в два симметричных пика при высоком значении коэффициента параметрического усиления. Небольшая асимметрия в положении левых и правых пиков относительно центра обусловлена достаточно большими углами поворота в кристалле и обычным законом преломления света на границе кристалла.



**Рисунок 2.19.** а) Распределение весов коэффициентов Шмидта для анизотропного направления (синие точки) и перпендикулярного ему направления без анизотропии (красные точки). б) Двумерное распределение интенсивности сигнала, направление анизотропии отмечено желтой линией.

Генерируемое таким образом высокоинтенсивное параметрическое излучение является также одномодовым, точнее, при высоком значении коэффициента параметрического излучения в спектре излучения выживают две моды, но профили (модули) и заселенности этих мод совпадают. На рисунке 2.20 представлены угловые зависимости интенсивности излучения, ковариации, а также первой моды Шмидта, имеющие характерный двухпиковый профиль: один пик гладкий, другой – интерференционный, что обусловлено проявлением пространственного сноса в длинном кристалле. Как видно, профили интенсивности, первой моды Шмидта, а также ковариации совпадают, что говорит об одномодовой структуре генерируемого излучения.



**Рисунок 2.20.** а) Угловые нормированные на максимум распределения интенсивности сигнала (красная кривая), ковариации (черная кривая), а также б) профиль первой моды Шмидта, в режиме генерации пучков максимальной интенсивности на длине волны 710 нм (угол поворота кристалла  $34.9^\circ$ ).

При этом, как было отмечено выше, неверно интерпретировать один пик в распределении интенсивности как сигнальный, второй – как холостой: обе моды являются одновременно и сигнальной, и холостой. Однако несмотря на одинаковый двухпиковый профиль интенсивности, моды представляют собой разные структуры и характеризуются различной симметрией: первая мода Шмидта является симметричной, вторая – антисимметричной, что является отражением симметрии амплитуды бифотона относительно замены сигнальных переменных на холостые.

## Глава 3

### **Взаимодействие модельного ридберговского атома с неклассическими полями.**

В данной главе исследуется динамика модельного ридберговского атома, представляющего собой несколько дискретных уровней и континуум в различных квантовых полях. В качестве начального состояния поля рассмотрены: неклассическое поле в состоянии сжатого вакуума, для сравнения с ним квантованное поле в когерентном состоянии, а также поле одного или нескольких фотонов (в соответствующем фоковском состоянии). Анализируются режимы возникновения интерференционной стабилизации, исследуется динамика корреляций, возникающих между атомной и полевой подсистемами в процессе их взаимодействия, предлагаются методы создания максимальной степени перепутанности атомной и полевой подсистем, а также экспериментального измерения степени корреляций и восстановления информации о смешанных атомных и полевых матрицах плотности системы, образующихся после взаимодействия атома с квантовым полем.

#### **3.1. Взаимодействие ридберговского атома с полем в состоянии сжатого вакуума и когерентным полем с различным числом фотонов.**

В данном разделе исследуется динамика модельного ридберговского атома, взаимодействующего с полем в состоянии сжатого вакуума, а также в когерентном поле, рассматриваются режимы высокого и низкого среднего числа фотонов распределений квантовых полей, анализируется возможность и условия возникновения интерференционной стабилизации и перепутывания между атомной и полевой подсистемами, а также динамика обнаруженных корреляций во времени [1].

### 3.1.1. Модель системы “атом+поле”.

Взаимодействие атома с одной модой квантованного поля описывается нестационарным уравнением Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = (\hat{H}_{\text{at}} + \hat{H}_{\text{field}} + \hat{V}_{\text{int}})\Psi, \quad (3.1)$$

где  $\hat{H}_{\text{at}}$  – гамильтониан невозмущенного атома,  $\hat{H}_{\text{field}}$  – гамильтониан одной полевой моды,  $\hat{V}_{\text{int}} = -\vec{d}\vec{\epsilon} = -\vec{d}\vec{q}\epsilon_0$  – оператор, описывающий взаимодействие атомной системы с внешним электромагнитным полем в дипольном приближении,  $q$  – безразмерная полевая координата,  $\epsilon_0 = \sqrt{\frac{4\pi\hbar\omega}{L^3}}$  – нормировочная константа. В данной главе атом рассматривается в модели нескольких дискретных уровней ( $\Lambda$ ,  $V$ -схемы) и континуума [95-97], что позволяет исследовать эволюцию возбужденных ридберговских состояний в квантовом электромагнитном поле и анализировать возможность интерференционной стабилизации. Схема  $\Lambda$  – типа представляет собой два дискретных уровня и континуум и дает возможность рассматривать когерентное перезаселение уровней за счет  $\Lambda$  - переходов между двумя дискретными уровнями через континуум. Схема  $V$  – типа представляет собой два дискретных уровня, нижележащее резонансное состояние и континуум. В данном случае помимо переходов  $\Lambda$  – типа необходимо также учитывать переходы  $V$  – типа через нижележащее резонансное состояние. Предполагается, что в начальный момент времени заселены два верхних атомных уровня, причем комплексные амплитуды заселения состояний имеют разность фаз  $\phi$ , а внешнее поле характеризуется некоторым начальным распределением по фоковским состояниям с амплитудами вероятности  $\alpha_k$ :

$$\Psi|_{t=0} = C_1\varphi_1 \sum_k \alpha_k \Phi_k + C_2 e^{i\phi} \varphi_2 \sum_k \alpha_k \Phi_k, \quad (3.2)$$



где  $\varphi_1, \varphi_2$ , и  $\{\Phi_k\}$  – волновые функции стационарного состояния атомной системы и полевого осциллятора без учета взаимодействия. Условие нормировки для полевых и атомных коэффициентов задается выражениями:

$$\sum_k |\alpha_k|^2 = 1, \quad C_1^2 + C_2^2 = 1. \quad (3.3)$$

В качестве начального состояния поля были рассмотрены когерентное состояние с пуассоновским распределением фоковских состояний, которое соответствует классическому свету при больших значениях среднего числа квантов  $\langle N \rangle$ , а также поле в состоянии сжатого вакуума; проводилось сравнение взаимодействия этих полей с атомной системой при фиксированном  $\langle N \rangle$ . Поле в состоянии сжатого вакуума представляет собой существенно неклассическое электромагнитное поле, характеризующееся широким распределением вероятностей заселения фоковских состояний по числу фотонов:  $|\alpha_{2k}|^2 = \frac{|\alpha_{2k-2}|^2 N_0}{N_0+1} \frac{2k-1}{2k}$ ,  $|\alpha_0|^2 = \frac{1}{\sqrt{N_0+1}}$ , где  $N_0$  – среднее число квантов поля. Указанное распределение медленно спадает с ростом  $k$ , что приводит к ненулевой вероятности заселения фоковских состояний с большими  $k$  и необходимости учитывать процессы высокого порядка многофотонности. При этом нулевое фоковское состояние имеет максимальную амплитуду заселения (исходя из свойств распределения) и не приводит к ионизации атомной системы при ее взаимодействии с полем. Стоит также отметить, что в состоянии сжатого вакуума заселены фоковские состояния только с четными номерами, что и характеризует его неклассические свойства, поскольку среднее значение напряженности электрического поля для такого распределения равно нулю, и характерное значение напряженности определяется дисперсией, то есть квантовыми флуктуациями.

Решение (3.1) будем искать в виде разложения по базису состояний невозмущенной системы:

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_n a_{nk}(t) \varphi_n(\vec{r}) \Phi_k + \int dE a_{Ek}(t) \varphi_E(\vec{r}) \Phi_k \right) e^{-i\omega(k+\frac{1}{2})t}, \quad (3.4)$$

где  $n$  пробегает значения от 1 до 2 для  $\Lambda$  – схемы и от 1 до 3 для  $V$  - схемы, интегрирование ведется по области континуума.

Подставляя указанный вид волновой функции в нестационарное уравнение Шредингера и пренебрегая прямыми переходами между близкорасположенными ридберговскими уровнями и переходами между различными состояниями континуума, в случае  $\Lambda$  – схемы получим систему из дифференциальных уравнений для амплитуд вероятности  $a_{nk}$  - обнаружить систему в дискретном состоянии  $n$  по атомной степени свободы и в фоковском состоянии  $k$  - по полевой, а также  $a_{Ek}$ , соответствующей нахождению атомной подсистемы в континууме:

$$\begin{cases} i\hbar \frac{da_{1k}}{dt} = E_1 a_{1k} - \sum_{p=0}^{\infty} \int a_{Ep} e^{i\omega(k-p)t} \langle \varphi_1 | d | \varphi_E \rangle \langle \Phi_k | \varepsilon_0 q | \Phi_p \rangle dE \\ i\hbar \frac{da_{2k}}{dt} = E_2 a_{2k} - \sum_{p=0}^{\infty} \int a_{Ep} e^{i\omega(k-p)t} \langle \varphi_2 | d | \varphi_E \rangle \langle \Phi_k | \varepsilon_0 q | \Phi_p \rangle dE \\ i\hbar \frac{da_{Ek}}{dt} = E a_{Ek} - \sum_{n=1}^2 \sum_{p=0}^{\infty} a_{np} e^{i\omega(k-p)t} \langle \varphi_E | d | \varphi_n \rangle \langle \Phi_k | \varepsilon_0 q | \Phi_p \rangle \end{cases} \quad (3.5)$$

где  $q$  – безразмерная полевая переменная,  $\varepsilon_0$  – нормировочная константа, определенная выше.

Учтем, что для полевого осциллятора возможны только переходы между состояниями поля с номерами, отличающимися на единицу, т. е.

$$\langle \Phi_i | \varepsilon_0 q | \Phi_k \rangle = \varepsilon_0 \left( \sqrt{\frac{k}{2}} \delta_{i,k-1} + \sqrt{\frac{k+1}{2}} \delta_{i,k+1} \right).$$

Используя “приближение вращающей волны”, оставим только резонансные слагаемые. Затем, проводя процедуру адиабатического исключения континуума [97], получим следующую систему дифференциальных уравнений для амплитуд вероятностей:

$$\begin{cases} i\hbar \frac{da_{1k}}{dt} = E_1 a_{1k} - i \frac{\Gamma_k}{2} \sum_{n=1}^2 a_{nk}(t) \\ i\hbar \frac{da_{2k}}{dt} = E_2 a_{2k} - i \frac{\Gamma_k}{2} \sum_{n=1}^2 a_{nk}(t) \end{cases}, \quad (3.6)$$

где  $\Gamma_k = 2\pi \frac{|d_{nE}|^2}{2} k \epsilon_0^2$  - ионизационная ширина, обусловленная взаимодействием атома с полем в фоковском состоянии  $|k\rangle$  и предполагаемая одинаковой для атомных состояний  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ .

Аналогичный подход использовался для модельной атомной системы с учетом резонансной связи с нижележащим атомным уровнем. В этом случае дифференциальная система для амплитуд вероятностей дискретных атомных состояний имеет вид:

$$\begin{cases} i\hbar \frac{da_{0k}}{dt} = E_0 a_{0k} + \sum_{n'=1}^2 \Omega_k a_{n'k-1} e^{i\omega t} \\ i\hbar \frac{da_{1k-1}}{dt} = \Omega_k a_{0k} e^{-i\omega t} + E_1 a_{1k-1} - i \frac{\Gamma_{k-1}}{2} \sum_{n'=1}^2 a_{n'k-1} \\ i\hbar \frac{da_{2k-1}}{dt} = \Omega_k a_{0k} e^{-i\omega t} + E_2 a_{2k-1} - i \frac{\Gamma_{k-1}}{2} \sum_{n'=1}^2 a_{n'k-1} \end{cases}. \quad (3.7)$$

Здесь  $\Omega_k = \frac{d_{0n}}{2} \epsilon_0 \sqrt{\frac{k}{2}}$ , - аналог частоты Раби для резонансного перехода.

Таким образом, в отличие от классического света в квантовом случае  $\Omega_k$  и  $\Gamma_k$  зависят от  $k$ , то есть вызванные полем переходы для каждого фоковского состояния имеют свою вероятность. Кроме того, в данном случае присутствуют три характерных параметра:  $\Omega_k$ ,  $\Gamma_k$ ,  $d = E_2 - E_1$ , соотношение между которыми определяет различные режимы динамики исследуемой атомной системы в квантовом поле.

Отметим, что специфика квантового поля заключается в том, что для него классическое понятие интенсивности  $I$  определяется величиной среднего числа фотонов  $\langle N \rangle$ , по которому можно судить обо всех

остальных характеристиках квантового поля:  $I = \frac{c\varepsilon_0^2 \langle N \rangle}{4\pi}$ , где нормировочная константа  $\varepsilon_0$  формально определяется характерным объемом резонатора  $L^3$ , а фактически – эффективностью взаимодействия атомной системы с полем. Аналогом классического поля в квантовом случае является когерентное состояние поля с пуассоновским распределением коэффициентов по числу фотонов с  $\langle N \rangle \gg 1$ , для которого ожидается получение тех же результатов, что и для классического поля.

Для классического поля существует некоторое пороговое значение интенсивности, определяющее переход в область сильного поля, аналогичным образом для квантового поля должно существовать некоторое критическое значение числа квантов, которое будет разделять задачу на области сильного и слабого поля. Для поля с пуассоновским распределением коэффициентов такое разграничение возможно, что связано с достаточно узкой локализацией заселенных полевых состояний около среднего числа квантов поля. Иная ситуация наблюдается для поля в состоянии сжатого вакуума: здесь при любом значении среднего числа фотонов  $\langle N \rangle$  всегда существует область как слабого, так и сильного поля, и суммирование необходимо производить по двум областям одновременно, что обусловлено широким распределением по числу фотонов такого квантового поля. Граница областей определяется из решения задачи и соответствует критическому числу фотонов, которое будет определено далее. Квантовое поле рассматривается в одной моде, количество учитываемых заселенных фоковских состояний зависит от специфики распределения: так, для поля в состоянии сжатого вакуума вклад могут вносить номера порядка  $\langle N \rangle^2$ .

Таким образом, в  $\Lambda$  – схеме фигурируют три важных параметра:  $d$  – расстояние между дискретными уровнями,  $\Gamma_k = \Gamma \cdot k$  – ионизационная ширина и  $\langle N \rangle$  – среднее число фотонов для данного состояния квантового поля. Для  $V$  – схемы появляется еще один параметр – аналог частоты Раби  $\Omega_k = \Omega \sqrt{k/2}$ . Наблюдаемые эффекты весьма чувствительны к выбору

начальных условий: в определенном диапазоне стабилизация может практически не наблюдаться. В работе выбраны следующие параметры:  $d = 0.1$  эВ,  $\Omega = 0.1$  эВ,  $\Gamma = 2 \cdot 10^{-4}$  эВ,  $E_2 = -0.4$  эВ,  $E_1 = -0.5$  эВ,  $E_0 = -1.5$  эВ,  $\hbar\omega = 1$  эВ. Отметим, что выбранные параметры соответствуют достаточно сильной связи с резонансным состоянием в V-схеме по сравнению с континуумом, что необходимо для реализации стабилизационного режима по аналогии с [96].

### 3.1.2. Аналитическое решение.

Для данной задачи в случае  $\Lambda$  – схемы было получено точное аналитическое решение системы (3.6) и были найдены временные зависимости амплитуд населенности дискретных состояний атома при условии, что поле находится в различных фоковских состояниях  $|k\rangle$ . Причем полученные решения существенно различны для случая слабого и сильного поля. Режим сильного поля соответствует условию перекрытия атомных уровней за счет ионизационной ширины  $\Gamma_k > d$ , что при выбранных параметрах задачи приводит к критическому числу фотонов, разделяющему эти две области, равному  $k_{kp} = 500$ .

Задачу более удобно рассматривать с точки зрения квазиэнергий и квазиэнергетических волновых функций, т. е. энергий и волновых функций, соответствующих “одетой” системе. Амплитуда вероятности нахождения атома в  $|n\rangle$  состоянии, а поля в  $|k\rangle$  состоянии в этом случае имеет вид:

$$a_{nk}(t) = A_{nk}e^{-i\gamma_+^k t} + B_{nk}e^{-i\gamma_-^k t}, \quad (3.8)$$

где коэффициенты  $A_{nk}$  и  $B_{nk}$  от времени не зависят и находятся из начальных условий. Система (3.6) аналогична системе, полученной для модельного атома в классическом поле в [96]. Однако здесь величина  $\Gamma_k$  зависит от номера  $k$ , возникающие квазиэнергии оказываются различными для разных фоковских состояний:

$$\gamma_{\pm}^k = \frac{E_1 + E_2}{2} - \frac{i\Gamma_k}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{\Gamma_k^2}{4}} \quad \text{для случая слабого поля } (d > \Gamma_k) \quad (3.9a)$$

$$\gamma_{\pm}^k = \frac{E_1 + E_2}{2} - \frac{i\Gamma_k}{2} \pm i \sqrt{\frac{\Gamma_k^2}{4} - \frac{d^2}{4}} \quad \text{для случая сильного поля } (d < \Gamma_k). \quad (3.9b)$$

Вероятность ионизации в терминах квазиэнергетических состояний имеет вид:

$$W_i = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ |A_{1k}|^2 + |B_{1k}|^2 + |A_{2k}|^2 + |B_{2k}|^2 + \left[ A_{1k} B_{1k}^* e^{-i(\gamma_+^k - \gamma_-^k)t} + B_{1k} A_{1k}^* e^{+i(\gamma_+^k - \gamma_-^k)t} \right] + \left[ A_{2k} B_{2k}^* e^{-i(\gamma_+^k - \gamma_-^k)t} + B_{2k} A_{2k}^* e^{+i(\gamma_+^k - \gamma_-^k)t} \right] \right\} \quad (3.10)$$

Итак, в слабом поле ( $d > \Gamma_k$ ) зависимость вероятности ионизации от времени задается следующим выражением:

$$W_i = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha_k|^2 e^{-\Gamma_k t}}{4\beta_k^2} \left\{ (C_1^2 + C_2^2)(d^2 - \Gamma_k^2 \cos(2\beta_k t)) - 2\Gamma_k C_1 C_2 [2\beta_k \cos\varphi \sin(2\beta_k t) + d \sin\varphi (\cos(2\beta_k t) - 1)] \right\}, \quad (3.11)$$

$$\text{где } \beta_k = \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{\Gamma_k^2}{4}}.$$

В сильном поле ( $d < \Gamma_k$ ) получаем следующую зависимость:

$$W_i = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha_k|^2 e^{-\Gamma_k t}}{4\beta_k^2} \left\{ (C_1^2 + C_2^2)(\Gamma_k^2 \operatorname{ch}(2\beta_k t) - d^2) - 4\Gamma_k C_1 C_2 \operatorname{sh}(\beta_k t) [\beta_k \cos\varphi \operatorname{ch}(\beta_k t) + d \sin\varphi \operatorname{sh}(\beta_k t)] \right\}, \quad (3.12)$$

$$\text{где } \beta_k = \sqrt{\frac{\Gamma_k^2}{4} - \frac{d^2}{4}}.$$

В каждом из выражений (3.11) и (3.12) учтено, что выбранное состояние поля соответствует режиму слабого или сильного поля для всех

фоковских состояний, присутствующих в начальном распределении. Такая ситуация достижима для пуассоновского начального распределения поля в том случае, если величина  $\langle N \rangle$  существенно отличается от  $k_{кр}$ . Однако даже для пуассоновского распределения с  $\langle N \rangle \sim k_{кр}$ , а особенно для случая “сжатого вакуума”, в распределении присутствуют различные фоковские состояния, часть которых взаимодействует с атомом в режиме слабого поля, а другая - в режиме сильного поля. Поэтому суммирование в выражении для вероятности ионизации необходимо проводить по каждой из областей в отдельности с учетом различия решений в указанных областях. Таким образом, ожидается, что в случае “сжатого вакуума” динамика атомной системы будет отлична от случая классического поля, рассмотренного в [96], что обусловлено различными вкладами в ионизацию большого числа фоковских состояний.

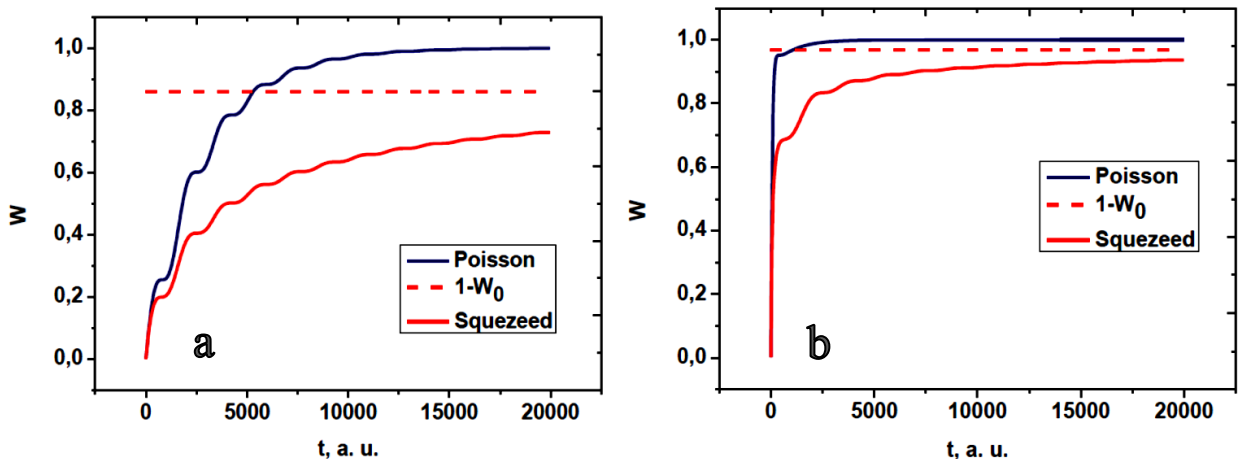
### 3.1.3. Динамика системы и режим интерференционной стабилизации.

Как видно из решения (3.11), в слабом поле ( $\Gamma_k < d$ ) разность квазиэнергий приводит к характерным осцилляциям заселенности атомных уровней с частотой порядка  $\frac{d}{\hbar}$  на фоне экспоненциального распада с течением времени. Для поля с пуассоновским распределением коэффициентов характерная постоянная распада близка к величине  $\Gamma_k$ , вычисленной для  $k = \langle N \rangle$ . Вероятность ионизации тем самым выходит на уровень насыщения, равный единице. На больших временах атомные уровни распадаются и система полностью ионизируется (рисунок. 3.1(а), синяя кривая).

В сильном поле ( $\Gamma_k > d$ ) характер квазиэнергий (3.9) принципиально меняется: одна из них ( $\gamma_-$ ) соответствует квазиэнергетическому состоянию, распадающемуся быстро с течением времени, другая ( $\gamma_+$ ) – более медленному распаду. Благодаря появлению медленно распадающегося квазиэнергетического уровня в сильном поле возможно наблюдение эффекта

стабилизации. В случае классического поля [96] стабилизация проявляется в том, что с ростом лазерной интенсивности все большая доля атомной заселенности оказывается “захваченной” в более устойчивое по отношению к ионизации квазиэнергетическое состояние. Поэтому в фиксированный момент времени наблюдается все большая вероятность обнаружить атом в связанном состоянии с увеличением лазерной интенсивности. Как результат, в общем случае динамика ионизации системы характеризуется двухэкспоненциальным распадом с течением времени.

Аналогичная ситуация имеет место и для квантового поля с пуассоновским начальным распределением по числу фотонов с  $\langle N \rangle \gg k_{кр}$ . Действительно, динамика ионизации системы в этом случае проявляет резкое увеличение заселения континуума на начальных временах, а затем гораздо более медленный выход вероятности ионизации на единицу (рисунок. 3.1(b), синяя кривая).



**Рисунок 3.1.** Зависимость вероятности ионизации от времени для  $\Lambda$  – схемы в случае начальной разности фаз  $\phi = 0$  для когерентного состояния (Poisson) – синяя кривая и для поля в состоянии сжатого вакуума (Squeezed) – красная кривая для **a)**  $\langle N \rangle = 50$  и **b)**  $\langle N \rangle = 1000$ . Горизонтальная прямая – уровень  $(1 - W_0)$ , где  $W_0$  - заселенность вакуумного состояния для поля в состоянии сжатого вакуума, время указано в атомных единицах.

Кроме того, стабилизация проявляется в фазовой чувствительности вероятности ионизации к начальной фазе амплитуды заселения атомных уровней. Поскольку в пределе  $\Gamma_k \gg d$  квазиэнергии (3.9) характеризуют



быстро распадающееся и стабильное состояние с волновыми функциями  $\psi_k^{\mp} = \frac{\varphi_1 \pm \varphi_2}{\sqrt{2}} \Phi_k$  соответственно, равновероятное начальное заселение атомных состояний с разностью начальных фаз амплитуд заселения, равной  $\pi$ , приводит к очень медленному распаду такого состояния. Однако на больших временах более устойчивый энергетический уровень также распадается, и система полностью ионизируется, что соответствует результатам, полученным для классического поля. Таким образом, результаты, полученные для поля с пуассоновской начальной статистикой, полностью соответствуют результатам, полученным в [96] в полуклассическом подходе, что, казалось бы, подтверждает классические свойства света с пуассоновским распределением даже для не слишком больших значений  $\langle N \rangle$ .

Для поля в состоянии сжатого вакуума, как было отмечено, невозможно разбиение отдельно на задачу в сильном и слабом поле: здесь суммирование производится одновременно по двум областям, поэтому в данном случае в динамике системы проявляются черты как слабого, так и сильного поля. Например, зависимость вероятности ионизации от времени имеет характерные осцилляции с частотой порядка  $\frac{d}{\hbar}$  аналогично случаю слабого поля, и, одновременно с этим, в данной ситуации можно наблюдать эффект стабилизации – эффект сильного поля. Как и ожидалось, эффект стабилизации в таком квантовом поле наблюдается более ярко. Причем в стабилизацию вносят вклад два разных фактора: первый – заселенность (причем максимальная для данного распределения) нулевого фоковского состояния, второй – отличная от нуля заселенность фоковских состояний с большими номерами  $k$  и их вклад в динамику устойчивых к ионизации квазиэнергетических состояний. Так как заселение нулевого фоковского состояния (вакуумного состояния) соответствует заселенности атомных состояний, не распадающихся с течением времени, то связанная с ним стабилизация присутствует в любой момент времени, причем, чем меньше

среднее число фотонов для данного поля, тем более заселено такое состояние, тем больше связанная с ним стабилизация. Однако при уменьшении среднего числа фотонов, уменьшается также и число учтенных нами состояний с высокими номерами  $k$  (учтены состояния с номерами порядка  $\langle N \rangle^2$ ), которые участвуют в формировании устойчивых к ионизации квазиэнергетических состояний. Таким образом, для данных параметров задачи существует оптимальное значение среднего числа фотонов, при котором эффект стабилизации для поля в состоянии сжатого вакуума будет наблюдаться максимально.

Динамика ионизации атомной системы под действием поля в состоянии “сжатого вакуума” представлена на рисунке 3.1(a) и рисунке 3.1(b) (красная кривая) для двух значений  $\langle N \rangle$ . Горизонтальной прямой на тех же рисунках отмечен уровень, соответствующий величине  $1 - W_0$ , где  $W_0$  - населенность вакуумного состояния. Данный уровень ограничивает вероятность ионизации сверху. Как видно, для обоих значений  $\langle N \rangle$  вероятность ионизации в сжатом вакууме меньше данной границы и имеет тенденцию к насыщению на уровне ниже указанного. В случае когда  $\langle N \rangle \ll k_{кр}$  характерное время выхода вероятности ионизации  $W_i(t)$  на уровень насыщения для поля в состоянии сжатого вакуума оказывается существенно больше времени выхода на единицу вероятности ионизации  $W_i(t)$  в случае пуассоновского распределения с тем же  $\langle N \rangle$ . Таким образом, уже при малых  $\langle N \rangle$  ионизация в “сжатом вакууме” замедляется, причем асимптотическое (при  $t \rightarrow \infty$ ) значение вероятности ионизации оказывается значительно меньше не только единицы, но и верхней границы, что обусловлено “стабилизирующей” ролью фоковских состояний с большим числом фотонов ( $k \gg k_{кр}$ ), входящих в данное поле состояние.

Аналогичная ситуация наблюдается и для  $\langle N \rangle = 1000$ . Однако в этом случае вероятность ионизации как для классического поля, так и для поля в состоянии сжатого вакуума характеризуется сначала быстрым, а затем

гораздо более медленным распадом. Таким образом, при ионизации атома “сжатым” неклассическим полем как для достаточно малых, так и для больших значений  $\langle N \rangle$ , наблюдается интерференционная стабилизация, которая проявляется гораздо сильнее чем в случае классических полей и заключается в формировании более устойчивого к ионизации волнового пакета связанных атомных состояний, а также в длительном удержании населенности в состояниях с большим числом фотонов.

Отметим также, что для квантового поля наблюдается еще более сильная (по сравнению с классическим полем) чувствительность ионизации к начальной разности фаз амплитуд заселения атомных уровней. В случае противофазного заселения атомных уровней в начальный момент времени система проявляет большую стабильность по сравнению с синфазным заселением. Таким образом, показано, что при взаимодействии атома с квантовым полем в состоянии сжатого вакуума в определенный момент времени образуется достаточно стабильная система, которая с течением времени практически не распадается.

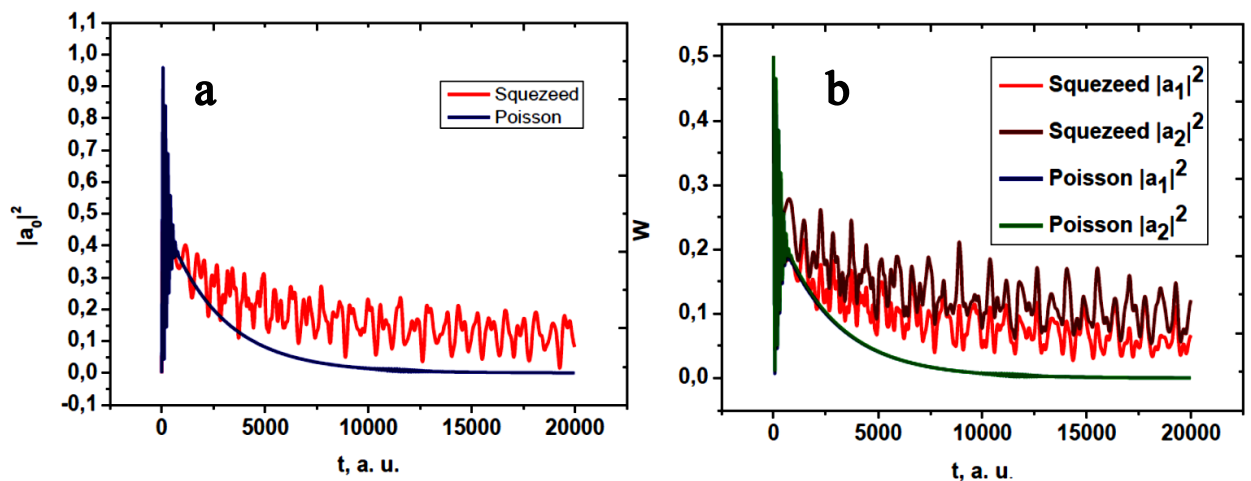
При рассмотрении  $V$  – системы ситуация усложняется. Здесь аналитическое решение имеет громоздкий вид, а наблюдаемая картина весьма чувствительна к начальным параметрам задачи. При взаимодействии атома с внешним полем возникают индуцированные переходы между дискретными уровнями как  $\Lambda$ -типа через континуум, так и  $V$ -типа через нижележащее резонансное состояние, поэтому интерференционная стабилизация проявляется намного лучше, чем для  $\Lambda$  – схемы. При этом важную роль играет соотношение между частотой кванта света и частотой Раби: при неудачной подборке параметров резонансные переходы имеют малую вероятность и практически не влияют на динамику системы.

Рассмотрение задачи в терминах квазиэнергий и квазиэнергетических волновых функций дает появление трех квазиэнергий, две из которых соответствуют состояниям, распадающимся достаточно быстро, а третья – состоянию, которое практически не распадается, что и ведет к появлению

эффекта стабилизации. Явный вид квазиэнергий можно получить, приравняв определитель следующей матрицы к нулю:

$$\begin{pmatrix} E_0 - \gamma & \Omega_k & \Omega_k \\ \Omega_k & E_1 - i\frac{\Gamma_{k-1}}{2} - \hbar\omega - \gamma & -i\frac{\Gamma_{k-1}}{2} \\ \Omega_k & -i\frac{\Gamma_{k-1}}{2} & E_2 - i\frac{\Gamma_{k-1}}{2} - \hbar\omega - \gamma \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

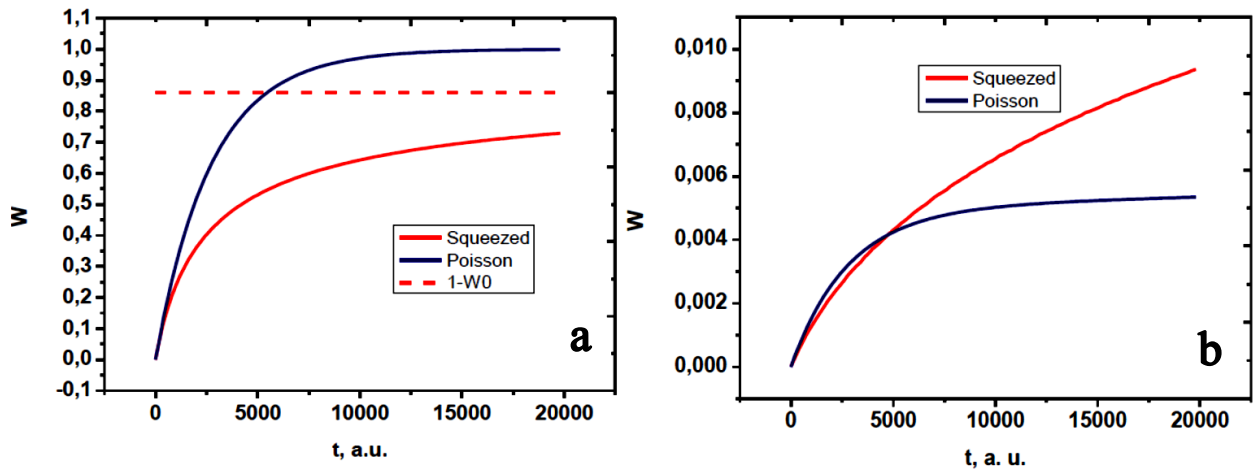
В связи с громоздкостью аналитических выражений в случае V – схемы решение задачи было произведено численно, при этом резонансный уровень в начальный момент времени предполагался незаселенным, но в процессе динамики системы такой уровень заселяется. В отличие от классического поля в сжатом вакууме для V – схемы даже на больших временах присутствуют осцилляции населенности как резонансного состояния (рисунок 3.2(a)), так и двух других уровней атома (рисунок 3.2(b)), что связано с влиянием большого числа фоковских состояний с большими номерами k, заселенными в неклассическом поле.



**Рисунок 3.2.** Зависимость населенности **а)** резонансного состояния и **б)** двух других атомных уровней от времени для V – схемы в случае  $\langle N \rangle = 50$  и начальной разности фаз  $\phi = 0$  для когерентного состояния (Poisson) и поля в состоянии сжатого вакуума (Squeezed), время указано в атомных единицах.

В связи с этим вероятность ионизации в неклассическом поле всегда меньше единицы, то есть непосредственно наблюдается эффект стабилизации при любой начальной разности фаз, что нельзя сказать о

классическом поле (рисунок. 3.3(a)). В случае начального заселения атомных уровней с разностью фаз  $\pi$  как для классического, так и для квантового поля почти сразу образуется достаточно стабильный волновой пакет, который с течением времени практически не распадается (рисунок 3.3(b)). В этих условиях стабилизация в классическом поле оказывается даже лучше за счет более высокой степени сфазированности состояний с точки зрения выполнения условий деструктивной интерференции переходов в континуум.



**Рисунок 3.3.** Зависимость вероятности ионизации от времени для V – схемы в случае  $\langle N \rangle = 50$  и начальной разности фаз **a)**  $\phi = 0$  **b)**  $\phi = \pi$  для когерентного состояния (Poisson) – синяя кривая и для поля в состоянии сжатого вакуума (Squeezed) – красная кривая. Горизонтальная прямая – уровень  $(1 - W_0)$ , где  $W_0$  - заселенность вакуумного состояния для поля в состоянии сжатого вакуума, время указано в атомных единицах.

Стоит также сказать несколько слов об эволюции внешнего электромагнитного поля, так как весьма важно то, насколько изменяется распределение по фоковским состояниям в процессе динамики системы, а изменение указанного распределения неизбежно и связано с наличием обмена энергией между атомной и полевой подсистемами. Одной из особенностей поля в состоянии сжатого вакуума является заселенность только четных фоковских состояний. Что касается  $\Lambda$  – схемы, то здесь заселение связанных состояний атома соответствует заселению четных фоковских состояний поля; а заселение состояний континуума – нечетных фоковских состояний. В случае, когда вероятность ионизации мала и

заселением континуума можно пренебречь, переходы  $\Lambda$  – типа приводят к перезаселению только четных фоковских состояний. Таким образом, распределение изменяется, но поле остается существенно неклассическим – среднее поле равно нулю. Иная ситуация наблюдается для  $V$  – схемы: переходы между дискретными атомными состояниями сопровождаются поглощением или испусканием фотона, что приводит к заселению нечетных фоковских состояний, таким образом, распределение качественно изменяется.

### 3.1.4. Перепутывание между атомной и полевой подсистемами.

Неотъемлемой и важной характеристикой взаимодействия атома с квантовым электромагнитным полем являются квантовые корреляции, возникающие между атомной и полевой подсистемами в процессе их взаимодействия и имеющие широкий спектр практических применений. В данном разделе рассматривается динамика таких квантовых корреляций во времени, анализируется степень перепутанности, а также режимы возникновения высоких значений перепутанности.

Для анализа степени запутанности системы выбран параметр Шмидта, который непосредственно связан с редуцированной матрицей плотности системы:

$$K = \text{Tr}(\rho_r^2)^{-1} \quad (3.14)$$

Для базиса непрерывных переменных параметр Шмидта может быть переписан в следующем виде [24]:

$$K = \frac{\int dx_1 dx_2 |\Psi(x_1, x_2)|^2}{\int dx_1 dx_2 dx'_1 dx'_2 \Psi(x_1, x_2) \Psi^*(x'_1, x_2) \Psi^*(x_1, x'_2) \Psi(x'_1, x'_2)} \quad (3.15)$$

Рассматривая только те состояния системы, которые остались связанными в процессе ионизации, нетрудно вычислить величину параметра Шмидта: подставляя нестационарную волновую функцию системы в виде разложения по собственным функциям связанных состояний и учитывая ортогональность базисных состояний, получим следующее выражение для параметра Шмидта через амплитуды вероятности, зависящие от времени:

$$K = \frac{(\sum_{ik} |a_{ik}|^2)^2}{\sum_{nmkj} a_{nk} a_{mk}^* a_{nj}^* a_{mj}} \quad (3.16)$$

где  $n$  и  $m$  пробегают значения 1-2 для  $\Lambda$  – схемы и 1-3 для  $V$  – схемы, а также производится двойное суммирование по полевым состояниям.

То же выражение может быть получено, исходя из матричных представлений. Элементы матрицы плотности системы «связанный атом + квантовое поле» имеют вид  $\rho_{ij}^{kl} = a_{ik} a_{jl}^*$ . Усреднение матрицы по полевым степеням свободы приводит к так называемой редуцированной матрице плотности, характеризующей состояние атомной подсистемы независимо от того, в каком состоянии находится поле:

$$\rho_r = \text{Sp}(\rho) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_k |a_{1k}|^2 & \sum_k a_{1k} a_{2k}^* \\ \sum_k a_{2k} a_{1k}^* & \sum_k |a_{2k}|^2 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Используя определение параметра Шмидта (3.15), нетрудно видеть, что и из матричного подхода также получается выражение (3.16).

Таким образом, становится ясным физический смысл параметра Шмидта: в случае чистого состояния атома след квадрата редуцированной матрицы плотности равен единице, то есть  $K = 1$ , если же состояние смешанное, то  $K > 1$ .

Проводя некоторые преобразования, можно получить более простое выражение для параметра Шмидта через одинарную сумму по полевым состояниям.

- в случае  $\Lambda$  – схемы:

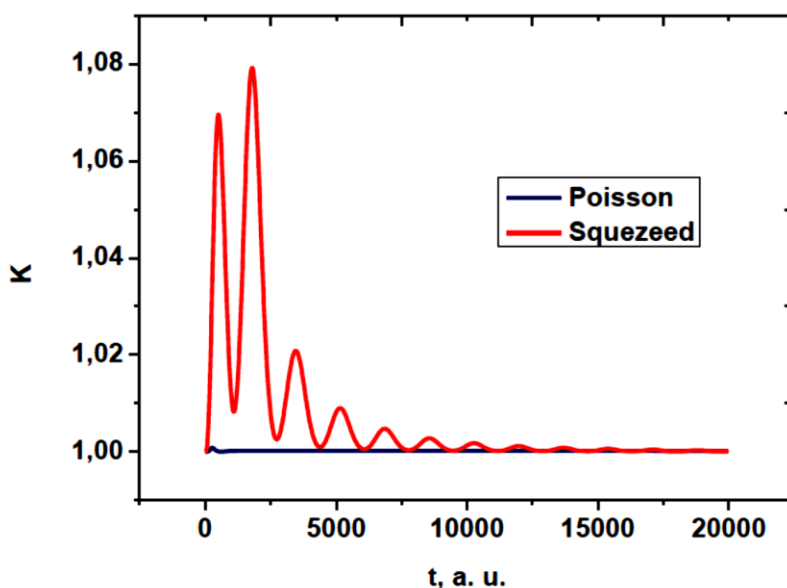
$$K = \frac{W_{\text{bound}}^2}{(\sum_k |a_{1k}|^2)^2 + (\sum_k |a_{2k}|^2)^2 + 2|\sum_k a_{1k} a_{2k}^*|^2} \quad (3.18)$$

- в случае  $V$  – схемы:

$$K = \frac{W_{\text{bound}}^2}{(\sum_k |a_{0k}|^2)^2 + (\sum_k |a_{1k}|^2)^2 + (\sum_k |a_{2k}|^2)^2 + 2|\sum_k a_{0k} a_{1k}^*|^2 + 2|\sum_k a_{0k} a_{2k}^*|^2 + 2|\sum_k a_{1k} a_{2k}^*|^2}, \quad (3.19)$$

где  $W_{\text{bound}} = \sum_{nk} |a_{nk}|^2$  – вероятность обнаружить атом в связанном состоянии.

Как и предполагалось, параметр Шмидта для  $\Lambda$  – схемы в случае классического поля при  $\langle N \rangle = 1000$  на протяжении всей динамики системы принимает значение, практически равное единице, то есть в данном случае корреляций между атомной и полевой подсистемами не наблюдается (рисунок 3.4, синяя кривая).



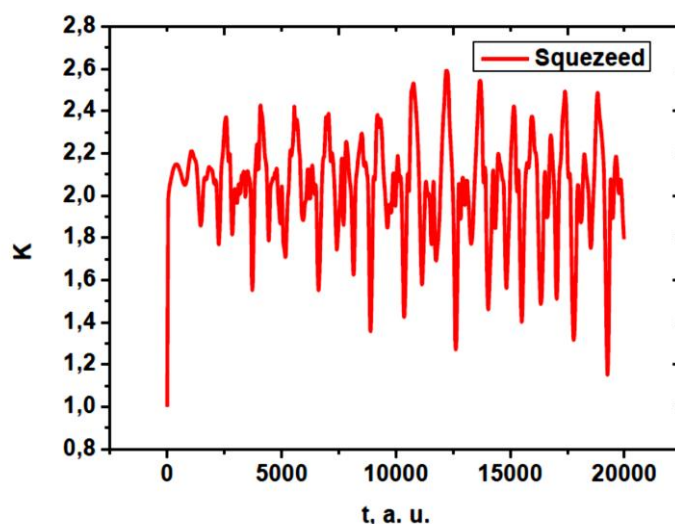
**Рисунок 3.4.** Зависимость параметра Шмидта от времени для  $\Lambda$  – схемы с начальной разностью фаз  $\phi = 0$  в случае  $\langle N \rangle = 1000$  для когерентного состояния (Poisson) – синяя кривая, и для поля в состоянии сжатого вакуума (Squeezed) – красная кривая. Время указано в атомных единицах.

Иной результат наблюдается в случае квантового поля: здесь параметр Шмидта оказывается больше единицы на некотором интервале времен (рисунок 3.4, красная кривая). На протяжении процесса ионизации система является перепутанной; факторизация наступает лишь при полном распаде одной из квазиэнергий. При этом начальное заселение атомных состояний в противофазе оказывается предпочтительным, поскольку в этом случае характерное время ионизации, а, следовательно, и перепутанности существенно возрастает. Отметим, что при увеличении среднего числа квантов степень перепутанности системы также возрастает, то есть наибольшая корреляция между атомной и полевой подсистемами возникает в



более сильном поле. Таким образом, перепутывание является эффектом чисто квантового поля, зависящим при этом от интенсивности.

Еще большей степени перепутанности можно достичь при наличии резонансной связи с нижележащим состоянием. В случае V – схемы при воздействии когерентного поля даже с небольшим  $\langle N \rangle$  возможно наблюдение несильного перепутывания системы на малых временах, пока существует заселенность резонансного состояния. По мере ионизации системы и опустошения резонансного состояния (рисунок 3.2(a)) параметр Шмидта стремится к единице, и  $K = 1$  на больших временах. В квантовом поле значительное перепутывание возникает уже при малой величине среднего числа фотонов (рисунок 3.5).



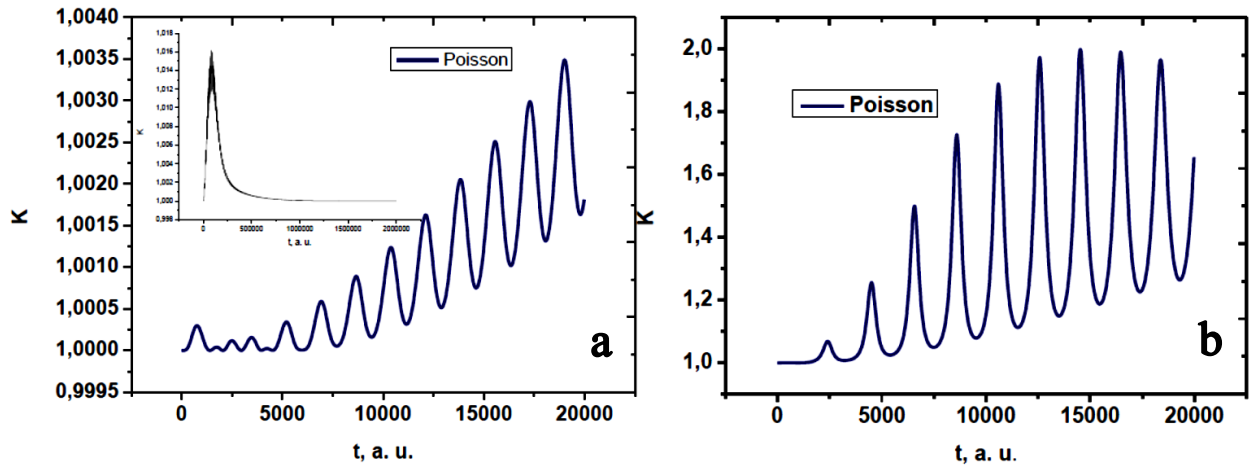
**Рисунок 3.5.** Зависимость параметра Шмидта от времени для V – схемы с начальной разностью фаз  $\phi = 0$  и поля в состоянии сжатого вакуума (Squeezed) в случае  $\langle N \rangle = 50$ . Время представлено в атомных единицах.

В данном случае также наблюдается взаимосвязь между остаточной заселенностью резонансного состояния и значением параметра Шмидта. Таким образом, пока резонансное состояние заселено, параметр Шмидта  $K > 1$ , система перепутана; если заселенность нижележащего состояния становится равной нулю, то V – система вырождается в  $\Lambda$  – систему, параметр Шмидта стремится к значению  $K = 1$ . В классическом поле в определенный момент времени заселенность резонансного состояния обращается в ноль, и V – схема вырождается в  $\Lambda$  – схему. В квантовом поле

даже на больших временах присутствует некоторая остаточная заселенность резонансного состояния, вырождения не происходит, система является постоянно перепутанной (рисунок 3.5, рисунок 3.2). Отметим, что в сравнение с  $\Lambda$  – схемой для  $V$  - схемы степень перепутывания зависит от начальной фазы заселения атомных уровней противоположным образом: при синфазной заселенности остаточная населенность резонансного состояния оказывается выше, чем при начальном заселении атомных уровней в противофазе, а следовательно и степень перепутанности в случае синфазного заселения оказывается выше. Кроме того, благодаря удержанию населенности в резонансном состоянии, параметр Шмидта в случае  $V$  – схемы оказывается выше, чем в  $\Lambda$  – схеме. Таким образом,  $V$  – схема является более удачной для наблюдения эффекта перепутывания.

Однако наблюдение перепутанности возможно и в когерентном поле с пуассоновским распределением по числу фотонов. Такая ситуация имеет место, например, в  $\Lambda$  – схеме, когда среднее значение числа фотонов близко к  $k_{кр}$ . При этом возникает смежный режим, когда скорость ионизации  $\Gamma_k$  и расстояние между дискретными уровнями  $d$  становятся величинами одного порядка. В этом случае в системе периодически наблюдается степень перепутанности, близкая к максимальной ( $K = 2$ ). Таким образом, помимо области сильного и слабого поля можно выделить третью область, где поведение параметра Шмидта имеет принципиально другой характер – это область вблизи критического значения числа фотонов  $k_{кр}$ . Для сравнения на рисунке 3.6 показано поведение параметра Шмидта в режиме слабого поля (рисунок 3.6(a)) и в случае, когда  $\langle N \rangle$  порядка критического числа фотонов (рисунок 3.6(b)), при этом наблюдаются значения  $K$ , близкие к его максимальной величине  $K_{max} = 2$ . Отметим, что такое когерентное состояние поля с  $\langle N \rangle \sim k_{кр}$ , казалось бы, можно считать классическим, что косвенно подтверждается соответствием динамики атомной системы в таком поле решению полуклассической задачи. Однако наблюдаемая высокая

степень корреляций между атомной и полевой подсистемами фактически выявляет неклассические черты данного полевого состояния. Таким образом, степень перепутанности, возникающая при взаимодействии когерентного света с ридберговским атомом, для которого средняя ионизационная ширина оказывается порядка расстояния по энергии между соседними уровнями, фактически может являться мерой неклассичности воздействующего поля.



**Рисунок 3.6.** Зависимость параметра Шмидта от времени для  $\Lambda$  – схемы с начальной разностью фаз  $\phi = 0$  для когерентного состояния поля (Poisson) в случае **a)** слабого поля с  $\langle N \rangle = 50$ , в верхнем левом углу представлено поведение той же кривой на больших временах и **b)** ”смешанного” поля с  $\langle N \rangle = 300$  ( $\langle N \rangle$  близко к критическому значению  $K_{кр} = 500$ ). Время представлено в атомных единицах.

Заметим, что с учетом перенормировки элементов редуцированной матрицы плотности  $\tilde{\rho}_r = \frac{1}{W_{bound}} \rho_r$  выражение (3.18) приводит к следующему соотношению для коэффициента Шмидта в случае  $\Lambda$ -схемы:

$$P = 2K_{\Lambda}^{-1} - 1 = (\tilde{\rho}_{22} - \tilde{\rho}_{11})^2 + 4\tilde{\rho}_{12}\tilde{\rho}_{21}. \quad (3.20)$$

Данная величина фактически характеризует степень «чистоты» атомного состояния при взаимодействии атома с квантованным полем. Действительно, при  $K = 1$  получаем  $P = 1$ , что соответствует факторизации суммарной волновой функции на произведение волновых функций атомной и полевой подсистем, а следовательно, возможности характеризовать атомную подсистему «чистым» состоянием.

Для экспериментального измерения перепутанности в данном случае достаточно определить либо параметр Шмидта  $K$ , либо степень «чистоты»

атомного состояния. Для этого необходимо измерить инверсную заселенность атомного состояния  $(\tilde{\rho}_{22} - \tilde{\rho}_{11})$ , что может быть сравнительно легко реализовано в эксперименте, а также последнее слагаемое в (3.20), несущее информацию о фазах, что представляет некоторую трудность. Одна из возможностей измерения этой величины основана на последующем взаимодействии такого атома, находящегося в состоянии  $\tilde{\rho}_r$ , с классическим полем той же частоты, что и первоначально воздействующее квантовое поле. В этом случае динамика атомной системы напрямую зависит от величины недиагональных элементов матрицы плотности и содержит информацию как об их амплитудах, так и о фазах.

Отметим, что в реальном атоме, когда имеется большое количество близкорасположенных ридберговских состояний, рассмотренная модель дает только качественное представление о динамике системы, а определение степени перепутанности представляет собой гораздо более трудную задачу. Однако, в случае наличия резонанса с одним из нижележащих состояний, все обнаруженные особенности динамики рассмотренной  $V$  – схемы имеют место, а мерой перепутанности системы может служить населенность изначально опустошенного резонансного состояния.

### **3.2. Взаимодействие Ридберговского атома с одним или несколькими фотонами.**

Благодаря развитию экспериментальных технологий на сегодняшний день стало возможным получение однофотонных состояний поля, а также осуществление взаимодействия одиночных фотонов с атомами с высокой эффективностью [73,74], что позволяет наблюдать эффекты сильного неклассического поля при взаимодействии атома всего с несколькими фотонами. В данном разделе рассмотрено взаимодействие модельного ридберговского атома с однофотонным состоянием поля, проанализированы

условия возникновения интерференционной стабилизации и перепутывания между атомной и полевой подсистемами, обсуждаются методы создания максимально перепутанных состояний, а также предлагаются методы управления и квантового контроля ридберговского q-бита посредством однофотонного полевого состояния. Все полученные далее результаты несложно обобщить на случай поля в фоковском состоянии с конкретным числом фотонов, большим одного [2].

### 3.2.1. Интерференционная стабилизация и перепутывание в случае $\Lambda$ – схемы.

В данном разделе также рассматривается нестационарное уравнение Шредингера (3.1), в котором теперь в качестве внешнего электромагнитного поля выступает однофотонное состояние. Для однофотонного поля в случае  $\Lambda$  – схемы волновая функция в начальный момент времени (3.2) редуцируется к более простому виду:

$$\psi|_{t=0} = (C_1\varphi_1 + C_2e^{i\phi}\varphi_2)\Phi_1, \quad (3.21)$$

где  $\phi$  - разность фаз заселения атомных уровней в начальный момент времени,  $\Phi_1$  - волновая функция однофотонного состояния,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  - волновые функции атомных состояний соответственно,  $C_1$  и  $C_2$  – амплитуды вероятности того, что атом находится в связанных состояниях  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , а полевая система представлена одним фотоном,  $C_1^2 + C_2^2 = 1$ .

Решение будем искать в виде разложения по базису состояний невозмущенной системы, отличие от предыдущей задачи заключается в том, что фотон в системе в начальный момент времени один, поэтому суммирования по полевым состояниям нет:

$$\psi(t) = \sum_n a_n(t)\varphi_n(\vec{r})\Phi_1 + \int dE a_E(t)\varphi_E(\vec{r})\Phi_0. \quad (3.22)$$

Подставляя указанный вид волновой функции в нестационарное уравнение Шредингера (3.1), пренебрегая переходами между дискретными

уровнями и различными состояниями континуума, а также проводя процедуру адиабатического исключения континуума, получим систему дифференциальных уравнений, аналогичную (3.6), но для одного фотона:  $k = 1$ ,  $\Gamma = \Gamma_1 = 2\pi \frac{|d_{nE}|^2}{2} \epsilon_0^2$  - ионизационная ширина, обусловленная взаимодействием атома с полем в фоковском состоянии  $|1\rangle$  и предполагаемая одинаковой для атомных состояний  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Будем полагать, что константа  $\epsilon_0^2$  характеризует эффективность взаимодействия атома и единичного фотона и является достаточно большой, чтобы обеспечить значительную вероятность ионизации атомной системы.

Рассматривая задачу в терминах квазиэнергий и квазиэнергетических волновых функций, где амплитуда вероятности нахождения атома в состоянии  $n$ , а поля в состоянии  $k$  записывается в виде (3.8), можно получить явные выражения для квазиэнергий  $\gamma_+$ ,  $\gamma_-$  и квазиэнергетических волновых функций  $\psi_{кЭС}^+$ ,  $\psi_{кЭС}^-$ , соответствующих этим квазиэнергиям. Квазиэнергии можно получить из (3.9) заменой  $k = 1$ , то есть характер квазиэнергий зависит от соотношения между параметрами  $d = E_2 - E_1$  и  $\Gamma$ : в случае слабого поля обе квазиэнергии распадаются одинаково, а их разность приводит лишь к характерным осцилляциям зависимости вероятности ионизации от времени. В случае же сильного поля существует быстро распадающаяся ( $\gamma_-$ ) и более стабильная ( $\gamma_+$ ) квазиэнергии; пренебрегая малыми слагаемыми порядка  $\frac{d^2}{\Gamma^2}$  выражения для квазиэнергий можно записать в виде:

$$\gamma_+ \approx E_1 + \frac{d}{2} - i \frac{d^2}{4\Gamma} \quad (3.23.а)$$

$$\gamma_- \approx E_1 + \frac{d}{2} - i\Gamma + i \frac{d^2}{4\Gamma}. \quad (3.23.б)$$

Как видно, чем меньше отношение  $\frac{d}{\Gamma}$ , тем более медленно распадается квазиэнергия  $\gamma_+$ , тем большую стабильность по отношению к вероятности ионизации проявляет система. При этом в процессе ионизации остается

заселенным только одно медленно распадающееся квазиэнергетическое состояние, и можно добиться хорошей стабилизации волнового пакета на значительных временах. Волновые функции квазиэнергетических состояний и их динамика во времени имеют вид:

$$\psi_{\text{кэс}}^+ \cong \left( \varphi_1 - \varphi_2 + \frac{id}{\Gamma} \varphi_2 \right) \Phi_1 A_+ e^{-i\gamma_+ t} \quad (3.24.а)$$

$$\psi_{\text{кэс}}^- \cong \left( \varphi_1 + \varphi_2 - \frac{id}{\Gamma} \varphi_2 \right) \Phi_1 A_- e^{-i\gamma_- t}, \quad (3.24.б)$$

где  $A_+$  и  $A_-$  - нормировочные константы. Из (3.24.а) и (3.24.б) следует, что задание стабильной квазиэнергии  $\psi_{\text{кэс}}^+$  в случае сильного поля ( $d < \Gamma$ ) соответствует равновероятному заселению атомных уровней с разностью фаз  $\phi = \pi$  в начальный момент времени; в то время как синфазное заселение атомных уровней в начальный момент времени соответствует заданию распадающегося квазиэнергетического состояния  $\psi_{\text{кэс}}^-$ . Таким образом, варьируя только разность начальной фазы заселения атомных уровней можно добиться как быстрой ионизации системы, так и существенной стабилизации волнового пакета.

Для анализа перепутывания системы, как и ранее, будем использовать параметр Шмидта. Для этого запишем матрицу плотности системы, редуцированную по атомным переменным:

$$\rho_r = \begin{pmatrix} \sum_n |C_{n0}|^2 & \sum_n C_{n0} C_{n1}^* \\ \sum_n C_{n1} C_{n0}^* & \sum_n |C_{n1}|^2 \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

Без учета континуума, но с учетом требуемой при этом перенормировки амплитуд такая матрица имеет вид:

$$\tilde{\rho}_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & |\tilde{C}_{11}|^2 + |\tilde{C}_{21}|^2 \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

где учтено, что вероятность нахождения атома в континууме, а поля при этом в состоянии, содержащем один фотон, равна нулю. Так как параметр Шмидта  $K = \text{Tr}(\tilde{\rho}^2)^{-1}$ , то без учета континуума перепутывание в  $\Lambda$  - схеме не

наблюдается (в данном случае поле характеризуется чистым состоянием), на протяжении всей динамики такая система является распутанной. Ситуация меняется при учете состояний континуума, в этом случае матрица плотности запишется в виде:

$$\begin{aligned} \rho_r &= \begin{pmatrix} \int dE |C_{E0}|^2 & 0 \\ 0 & |C_{11}|^2 + |C_{21}|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_i & 0 \\ 0 & 1 - W_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^0 & 0 \\ 0 & W^1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 - W^1 & 0 \\ 0 & W^1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

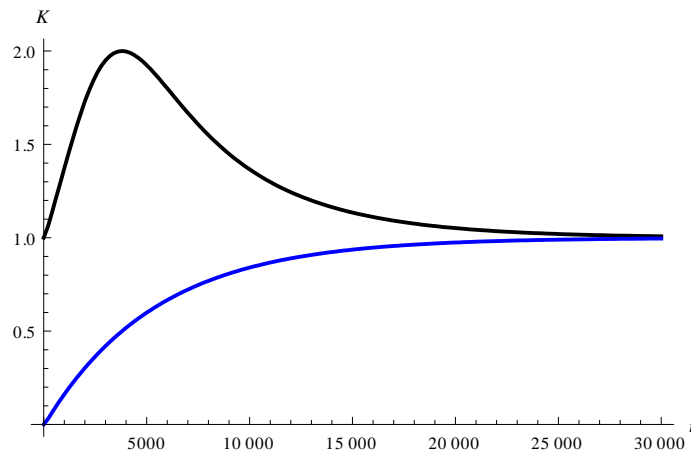
где  $W_i$  - вероятность ионизации,  $W^1$  - вероятность того, что в системе находится один фотон,  $W^0 = 1 - W^1$  - вероятность того, что в системе нет ни одного фотона. Таким образом, поле характеризуется смешанным состоянием.

В данном случае аналитическое выражение для параметра Шмидта принимает вид:

$$K = \frac{1}{1 - 2W_i + 2W_i^2} = \frac{1}{(1 - W^1)^2 + (W^1)^2}, \quad (3.28)$$

то есть параметр Шмидта непосредственно связан с вероятностью ионизации системы, а также с вероятностью нахождения одного фотона в системе, поэтому степень перепутанности может быть измерена посредством нахождения вероятности ионизации или путем измерения вероятности нахождения в системе одного фотона, что возможно при современной технике эксперимента. Исследуя на экстремум полученное выражение, можно показать, что максимально возможное значение параметра Шмидта для данной системы  $K = 2$  достигается при  $W_i = \frac{1}{2}$ , при дальнейшей ионизации перепутанность системы уменьшается, и в случае полной ионизации система окончательно распутывается. На рисунке 3.7 показана зависимость вероятности ионизации (синяя кривая) и параметра Шмидта (черная кривая) от времени в случае задания в начальный момент времени стабильного квазиэнергетического состояния.





**Рисунок 3.7.** Зависимость вероятности ионизации (синяя кривая) и параметра Шмидта (черная кривая) от времени для  $\Lambda$  – схемы в случае начальной разности фаз  $\phi = 0$  и равновероятного заселения атомных уровней  $C_1 = C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\Gamma = 1$  эВ. Время представлено в атомных единицах.

### 3.2.2. Интерференционная стабилизация и перепутывание в случае V – схемы.

В случае V- схемы для сравнения мы рассмотрим два вида начальных условий: случай, когда резонансное состояние в начальный момент времени не заселено, два другие заселяются равновероятно; и случай, когда в начальный момент времени заселены все три уровня атомной системы. Наличие заселенности резонансного состояния в начальный момент времени во втором случае добавляет новые переходы в системе и соответственно ведет к некоторому усложнению задачи, но, тем не менее, ее аналитическое решение также возможно.

*A) В начальный момент времени заселены два высоковозбужденных ридберговских уровня.*

В системе V – типа, в которой в начальный момент времени резонансное состояние не заселено, а из полевой компоненты присутствует один фотон, то есть в начальный момент времени отличны от нуля только амплитуды вероятности  $a_{11}, a_{21}$ , где первый индекс соответствует атомной подсистеме, второй – полевой, в процессе динамики системы происходит перезаселение уровней, и населенность резонансного состояния  $a_{02}$

становится отличной от нуля; также вследствие ионизации становится отличной от нуля амплитуда  $a_{E0}$  - амплитуда вероятности того, что атом перешел в состояние континуума, а в полевой подсистеме не осталось ни одного фотона.

Пренебрегая переходами между резонансным уровнем и континуумом, получим систему дифференциальных уравнений, которая следует из (3.7) при подстановке  $k = 1$ :

$$\begin{cases} i\hbar \frac{da_{01}}{dt} = E_0 a_{01} + \sum_{n'=1}^2 \Omega_1 a_{n'0} e^{i\omega t} \\ i\hbar \frac{da_{10}}{dt} = \Omega_1 a_{01} e^{-i\omega t} + E_1 a_{10} - i \frac{\Gamma_0}{2} \sum_{n'=1}^2 a_{n'0} \\ i\hbar \frac{da_{20}}{dt} = \Omega_1 a_{01} e^{-i\omega t} + E_2 a_{20} - i \frac{\Gamma_0}{2} \sum_{n'=1}^2 a_{n'0} \end{cases} \quad (3.29)$$

где  $\Omega = \Omega_1 = \frac{d_{0n}}{2} \varepsilon_0 \sqrt{\frac{1}{2}}$ , - аналог частоты Раби для резонансного перехода,  $\Gamma = \Gamma_0 = 2\pi \frac{|d_{nE}|^2}{2} \varepsilon_0^2$ . В начальный момент времени волновая функция имеет вид (3.21):  $\psi|_{t=0} = (C_1 \varphi_1 + C_2 e^{i\Phi} \varphi_2) \Phi_1$ ,  $C_1^2 + C_2^2 = 1$ .

Решение задачи, как и ранее, будем проводить методом квазиэнергий и квазиэнергетических волновых функций, при этом амплитуда вероятности нахождения атома в состоянии  $n$ , а поля в состоянии  $k$  запишется в виде:

$$a_{nk}(t) = A_{nk} e^{-i\gamma_0 t} + B_{nk} e^{-i\gamma_1 t} + C_{nk} e^{-i\gamma_2 t}. \quad (3.30)$$

В данном случае возникают уже три квазиэнергии  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$  и три соответствующих им квазиэнергетических состояния  $\psi_{кЭС}^0, \psi_{кЭС}^1, \psi_{кЭС}^2$ , для нахождения явного вида квазиэнергий подставим (3.30) в систему дифференциальных уравнений (3.29). Учитывая, что выбранный квант света удовлетворяет резонансному условию:  $\hbar\omega = \frac{E_1 + E_2}{2} - E_0 = \bar{E} - E_0$ , где  $E_0$  - энергия резонансного состояния,  $E_1, E_2$  - энергии двух других состояний соответственно, получим следующие выражения для квазиэнергий:

$$\gamma_0 = E_0, \quad \gamma_{1,2} = \bar{E} + \frac{-i\Gamma \pm \sqrt{d^2 + 8\Omega^2 - \Gamma^2}}{2}, \quad d = E_2 - E_1. \quad (3.31)$$

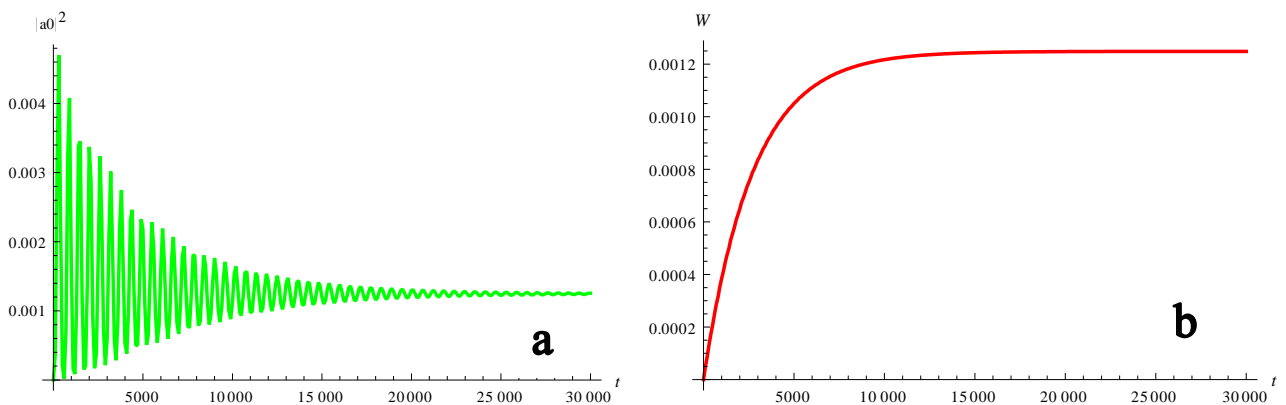
Таким образом, видно, что при любых начальных параметрах задачи существует стабильный, не распадающийся с течением времени уровень

энергии. А значит, если в начальный момент времени задать только один квазиэнергетический уровень  $\gamma_0$ , то другие квазиэнергетические уровни заселяться не будут, следовательно, на протяжении всей динамики в системе будет присутствовать только одна не распадающаяся квазиэнергия, ионизация наблюдаться не будет. Волновая функция стабильного квазиэнергетического состояния, отвечающего квазиэнергии  $\gamma_0$ , имеет вид:

$$\psi_{\text{КЭС}}^0 = ((\varphi_1 - \varphi_2)\Phi_1 + \frac{d}{2\Omega}\varphi_0\Phi_2) * A, \quad (3.32)$$

где  $A = \sqrt{\frac{1}{2 + \frac{d^2}{4\Omega^2}}}$  - нормировочная константа.

Стабильное квазиэнергетическое состояние может быть с легкостью задано экспериментально при выборе параметров задачи таким образом, чтобы частота Раби была самым большим параметром задачи:  $\Omega \gg \Gamma, d$ , тогда по отношению к начальным условиям задание одной квазиэнергии означает заселении атомных уровней  $E_1$  и  $E_2$  в противофазе:  $\psi|_{t=0} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\sqrt{2}}\Phi_1$ . В данном случае населенность резонансного состояния атома, а также вероятность ионизации имеют вид, представленный на рисунке 3.8.



**Рисунок 3.8.** Зависимость **a)** населенности резонансного состояния и **b)** вероятности ионизации от времени для V – схемы в случае  $\Omega \gg \Gamma, d$ , ( $\Omega = 1$  эВ), начальной разности фаз  $\phi = \pi$ , начальных амплитуд заселения атомных уровней  $C_1 = C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ;  $C_0 = 0$ ,  $\psi|_{t=0} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\sqrt{2}}\Phi_1$ . Время представлено в атомных единицах.

Таким образом, изначально незаселенное резонансное состояние в процессе динамики системы заселяется, и даже на больших временах его

населенность хоть и мала, но отлична от нуля (рисунок 3.8(a)). Населенность двух других уровней атома в процессе динамики системы также претерпевает небольшие изменения, но при  $t \rightarrow \infty$  становится постоянной и близкой по величине к начальному значению. В связи с этим вероятность ионизации системы при таких начальных условиях крайне мала (рисунок 3.8(b)) и выходит на уровень насыщения тогда, когда населенности атомных уровней выходят на некоторые постоянные значения. Наличие незначительного распада системы в данном случае объясняется тем, что на самом деле, согласно (3.32) задание стабильной квазиэнергии в начальный момент времени требует ненулевой вероятности присутствия двух фотонов в системе  $\frac{d}{2\Omega} \varphi_0 \Phi_2$ . Поэтому если в начальный момент времени каким-то образом задать в точности квазиэнергетическое состояние  $\psi_{\text{кЭС}}^0$ , то система не будет распадаться даже в том случае, когда параметры  $\Omega$  и  $d$  имеют один порядок. Заселенность энергетических состояний в данном случае остается постоянной на протяжении всего времени наблюдения за системой и равной заселенности атомных уровней в начальный момент времени, а значит, и вероятность ионизации системы равна нулю на протяжении всего времени наблюдения. Таким образом, в случае V – схемы возможно получение исключительно стабильного состояния, в котором величина вероятности заселения того или иного уровня атома может быть выбрана изначально, подбором соответствующих параметров атомной системы.

Стоит также отметить, что среди двух других квазиэнергий  $\gamma_1, \gamma_2$  при условии  $\Gamma \gg d, \Omega$  одна квазиэнергия соответствует более стабильному состоянию, другая - быстро распадающемуся. Действительно, в таком приближении имеем:

$$\gamma_1 \cong -i \frac{\Delta^2 + 8\Omega^2}{4\Gamma} - \text{стабильное состояние}; \quad (3.33. \text{a})$$

$$\gamma_2 \cong -i\Gamma + i \frac{\Delta^2 + 8\Omega^2}{4\Gamma} - \text{распадающееся состояние}. \quad (3.33. \text{б})$$

Таким образом, в данном случае помимо исключительно стабильной квазиэнергии  $\gamma_0$  существует медленно распадающийся с течением времени квазиэнергетический уровень  $\gamma_1$ , который также вносит вклад в стабилизацию системы, поэтому область режима стабилизации относительно начальных параметров расширяется. В случае же когда  $\Gamma < d, \Omega$ , как нетрудно заметить, обе квазиэнергии  $\gamma_1, \gamma_2$  распадаются одинаково.

Для анализа степени перепутанности системы будем по-прежнему использовать параметр Шмидта, для этого запишем матрицу плотности системы без учета континуума и произведем редуцирование по атомным переменным. Редуцированная по атомным переменным матрица плотности системы (с учетом перенормировки амплитуд) имеет вид:

$$\tilde{\rho}_r = \frac{1}{W_b} \begin{pmatrix} \sum_n |a_{n0}|^2 & \sum_n a_{n0} a_{n1}^* & \sum_n a_{n0} a_{n2}^* \\ \sum_n a_{n1} a_{n0}^* & \sum_n |a_{n1}|^2 & \sum_n a_{n1} a_{n2}^* \\ \sum_n a_{n2} a_{n0}^* & \sum_n a_{n2} a_{n1}^* & \sum_n |a_{n2}|^2 \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

Оставляя только неравные нулю амплитуды, получим:

$$\tilde{\rho}_r = \frac{1}{W_b} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & |a_{11}|^2 + |a_{21}|^2 & 0 \\ 0 & 0 & |a_{02}|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_1 + W_2 & 0 \\ 0 & 0 & W_0 \end{pmatrix}, \quad (3.35)$$

где  $W_1, W_2, W_0$  – вероятности заселения атомных уровней в процессе динамики системы,  $W_b$  – вероятность системы остаться в связанном состоянии.

Теперь учтем ту часть заселенности, которая перешла в континуум, то есть вычислим амплитуду  $a_{E0}$ , а затем проведем интегрирование по всем состояниям континуума. С учетом континуума редуцированная матрица плотности принимает вид:

$$\rho_r = \begin{pmatrix} \int_0^\infty a_{E0} a_{E0}^* dE & 0 & 0 \\ 0 & |a_{11}|^2 + |a_{21}|^2 & 0 \\ 0 & 0 & |a_{02}|^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} W_i & 0 & 0 \\ 0 & W_1 + W_2 & 0 \\ 0 & 0 & W_0 \end{pmatrix}, \quad (3.36)$$

где  $W_i$  - вероятность ионизации системы. Как известно, параметр Шмидта определяется через квадрат следа редуцированной матрицы плотности:  $K = \text{Tr}(\rho_r^2)^{-1}$ , поэтому для V – схемы также возможно получение аналитических выражений для меры перепутанности – параметра Шмидта:

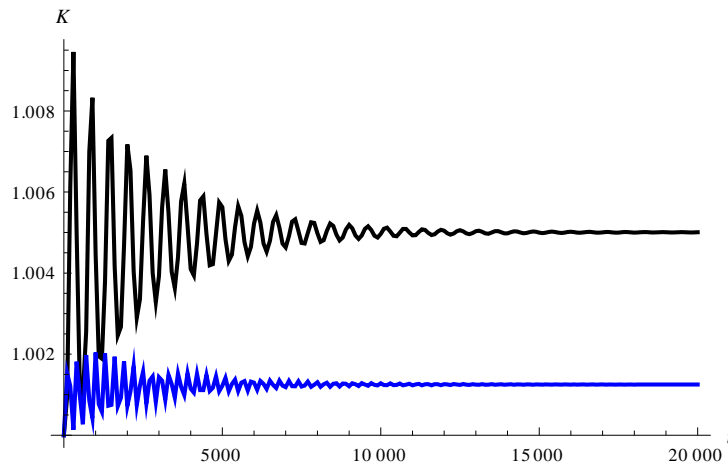
$$K = \frac{(W_0 + W_1 + W_2)^2}{(W_1 + W_2)^2 + W_0^2} - \text{без учета континуума}; \quad (3.37)$$

$$K = \frac{1}{W_i^2 + (W_1 + W_2)^2 + W_0^2} - \text{с учетом континуума}. \quad (3.38)$$

Проводя исследование на экстремум указанных выражений, можно показать, что максимальное значение параметра Шмидта без учета континуума составляет  $K_{max} = 2$  и достигается при  $W_0 = W_1 + W_2 = \frac{1}{2}$ . С учетом континуума максимально возможное значение параметра Шмидта  $K_{max} = 3$  достигается при  $W_0 = W_1 + W_2 = W_i = \frac{1}{3}$ . То есть система является максимально перепутанной тогда, когда вероятности заселения атомных уровней и вероятность ионизации в континуум принимают одинаковые значения. В случае задания стабильного квазиэнергетического состояния (3.32) можно получить выражение для параметра Шмидта через параметры задачи  $d$  и  $\Omega$  (параметры Шмидта, вычисленные с учетом и без учета континуума, в данном случае одинаковы, так как ионизации нет):

$$K = 1 + \frac{2 * \frac{8\Omega^2}{d^2}}{1 + \left(\frac{8\Omega^2}{d^2}\right)^2}. \quad (3.39)$$

Таким образом, в упомянутом выше режиме, где частота Раби  $\Omega$  является самым большим параметром:  $\Omega > \Gamma, d$ , в начальный момент времени задана волновая функция  $\psi|_{t=0} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\sqrt{2}} \Phi_1$ , и согласно (3.32) стабильная квазиэнергетическая волновая функция может быть приближенно записана в виде:  $\psi_{\text{кэс}}^0 \cong (\varphi_1 - \varphi_2) \Phi_1 * \frac{1}{\sqrt{2}}$  параметр Шмидта близок к единице  $K \approx 1$  на протяжении всей динамики системы, то есть система практически всегда распутана. Небольшая перепутанность связана с тем, что  $\frac{\Delta}{2\Omega}$  хоть и малый параметр, но все-таки отличный от нуля:  $\frac{\Delta}{2\Omega} \varphi_0 \Phi_2 \neq 0$ , при этом степень перепутанности тем меньше, чем больше частота  $\Omega$  при неизменных остальных параметрах задачи. Так, при увеличении  $\Omega$  в два раза значение параметра Шмидта понижается, корреляций между атомной и полевой подсистемами практически не наблюдается. В таком случае небольшая перепутанность между атомной и полевой подсистемами имеется на протяжении всей динамики системы и после стабилизации по отношению к процессу ионизации выходит на некоторый постоянный уровень (рисунок 3.9).

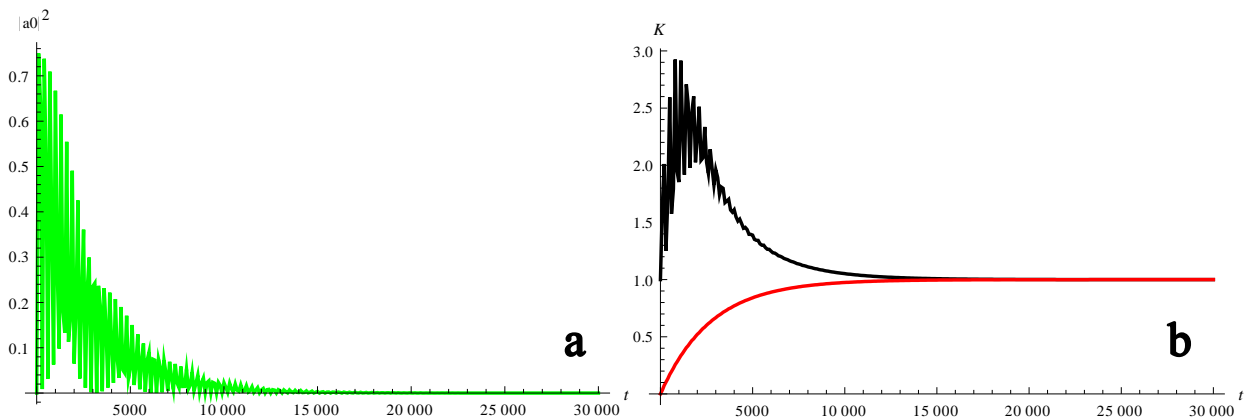


**Рисунок 3.9.** Зависимость параметра Шмидта от времени для V – схемы в случае  $\Omega \gg \Gamma, d$ , ( $\Omega = 1$  эВ - черная кривая;  $\Omega = 2$  эВ - синяя кривая), начальной разности фаз  $\phi = \pi$ , начальных амплитуд заселения атомных уровней  $C_1 = C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ;  $C_0 = 0$ ,  $\psi|_{t=0} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\sqrt{2}} \Phi_1$ . Время представлено в атомных единицах.

Стоит отметить, что в данном случае результаты вычисления параметра Шмидта с учетом и без учета континуума отличаются незначительно, что

связано с малой степенью ионизации системы. Таким образом, режим  $\Omega > \Gamma, d$ ,  $\psi|_{t=0} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\sqrt{2}} \Phi_1$  приводит к реализации стабильного по отношению к ионизации волнового пакета, но с малой степенью перепутанности.

Для создания высоких значений перепутанности, как следует из выражения для параметра Шмидта с учетом континуума (3.38), необходимо, чтобы происходила ионизация системы. В связи с этим нужно в начальный момент времени задать суперпозицию квазиэнергетических состояний, что может быть реализовано при синфазном заселении атомных уровней в начальный момент времени:  $\psi|_{t=0} = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{\sqrt{2}} \Phi_1$ . Стоит отметить, что синфазное заселение атомных уровней в пределе  $\Omega > \Gamma, d$  соответствует тому, что вероятность задания стабильного квазиэнергетического состояния равна нулю, поэтому в процессе динамики такая система полностью распадается: резонансный уровень начинает постепенно заселяться, но с течением времени, в силу присутствия только распадающихся квазиэнергий, распадается, распадаются и два других уровня атома, система полностью ионизируется. Заселенность резонансного состояния, а также вероятность ионизации с течением времени представлены на рисунке 3.10.



**Рисунок 3.10.** Зависимость **а)** населенности резонансного состояния и **б)** вероятности ионизации (красная кривая), а также параметра Шмидта (черная кривая) от времени для V – схемы в случае  $\Omega \gg \Gamma, d$ , ( $\Omega = 1$  эВ), начальной разности фаз  $\phi = 0$ , начальных амплитуд заселения атомных уровней  $C_1 = C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ;  $C_0 = 0$ ,  $\psi|_{t=0} = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{\sqrt{2}} \Phi_1$ . Время представлено в атомных единицах.



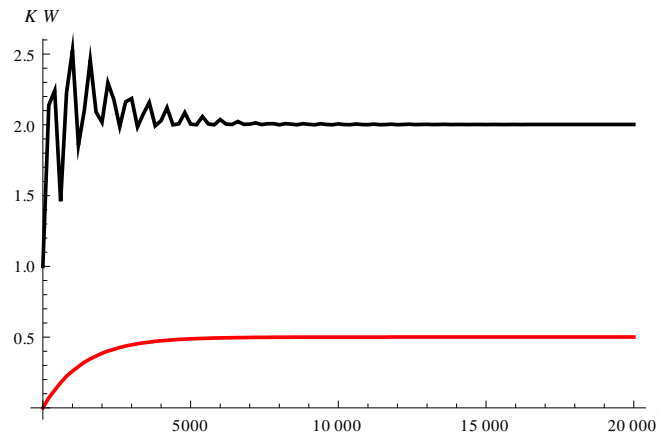
Указанное состояние представляет собой распадающееся состояние системы, эффект стабилизации в данном случае в явном виде не наблюдается. Однако в данном случае возможно создание высоких значений перепутанности.

Из редуцированной матрицы плотности системы с учетом континуума (3.36) следует, что степень перепутанности между атомной и полевой подсистемами зависит от соотношения между вероятностью заселения дискретных атомных уровней и состояний континуума. Причем максимального значения параметр Шмидта достигает тогда, когда заселенность резонансного состояния, двух других уровней атома, а также континуума – величины одного порядка. Таким образом, при заселении атомных уровней синфазно перепутанность значительно возрастает по сравнению со случаем задания стабильного квазиэнергетического состояния в начальный момент времени и практически достигает максимально возможного значения для данной системы  $K = 3$ . Однако по мере ионизации все амплитуды вероятности, кроме  $a_{E0}$ , обращаются в ноль, и согласно виду редуцированной матрицы плотности с учетом континуума (3.36) система начинает распутываться и переходит в итоге в чистое состояние (рисунок 3.10(b), черная кривая). Таким образом, в данном случае возможно наблюдение значительных корреляций между атомной и полевой подсистемой на небольших временах, но ввиду полной ионизации в пределе  $t \rightarrow \infty$  система полностью распутывается.

Поэтому интересным для получения высокой степени перепутанности, в том числе на больших временах, представляется некоторый смежный режим, в котором присутствует в достаточной мере ионизация, но при дальнейшей динамике система обнаруживает стабильность. Такой режим может быть получен при заселении дискретных атомных уровней в начальный момент времени с разностью фаз  $\frac{\pi}{2}$ :  $\psi|_{t=0} = \frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{\sqrt{2}} \Phi_1$ . Действительно, в данном случае в пределе  $\Omega > \Gamma, d$  вероятность заселения стабильного квазиэнергетического состояния (3.32) в начальный момент

времени равна  $W = \frac{1}{2}$ , а это значит, что после полного распада двух других квазиэнергий населенность дискретных атомных состояний и населенность континуума будут одинаковы, поэтому согласно виду редуцированной матрицы плотности с учетом континуума (3.36) такое состояние после стабилизации системы будет являться перепутанным.

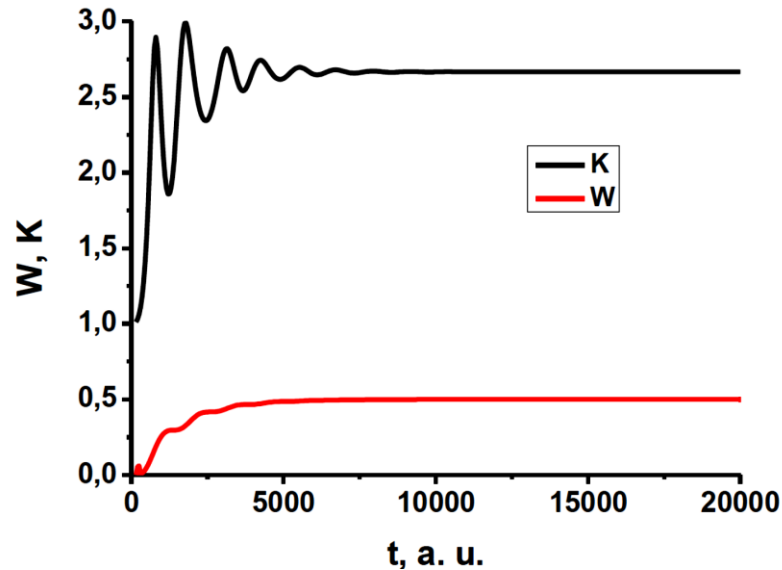
Таким образом, в данном случае из приготовленного в начальный момент времени чистого состояния в процессе динамики системы образуется состояние с высокой степенью перепутанности, причем после стабилизации системы по отношению к процессу ионизации, параметр Шмидта остается постоянным и равным  $K = 2$ , то есть полученная система является стабильной и перепутанной даже в пределе  $t \rightarrow \infty$  (рисунок 3.11).



**Рисунок 3.11.** Зависимость параметра Шмидта с учетом континуума (черная кривая) и вероятности ионизации (красная кривая) от времени для V – схемы в случае  $\Omega \gg \Gamma, d$ , ( $\Omega = 1$  эВ), начальной разности фаз  $\phi = \frac{\pi}{2}$ , начальных амплитуд заселения атомных уровней  $C_1 = C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ;  $C_0 = 0$ ,  $\psi|_{t=0} = \frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{\sqrt{2}} \Phi_1$ . Время представлено в атомных единицах.

Однако если параметры задачи выбрать таким образом, чтобы выполнялось соотношение  $\frac{d}{\Omega} = \sqrt{8}$  между частотой Раби  $\Omega$  и расстоянием между дискретными уровнями  $d$ , что реализуется при соответствующей подборке атомных уровней в ридберговском атоме, а также в начальный момент времени равновероятно заселить вышележащие атомные уровни в противофазе:  $\psi|_{t=0} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\sqrt{2}} \Phi_1$ , то в начальный момент времени будет реализована суперпозиция квазиэнергетических состояний, вероятность

заселения стабильной квазиэнергии, как и в предыдущем случае, будет равна  $W = \frac{1}{2}$ . То есть в системе также будет происходить ионизация, связанная с распадом нестабильных квазиэнергетических состояний, с последующей стабилизацией системы за счет ненулевой вероятности заселения стабильного квазиэнергетического состояния в начальный момент времени (рисунок 3.12, красная кривая).



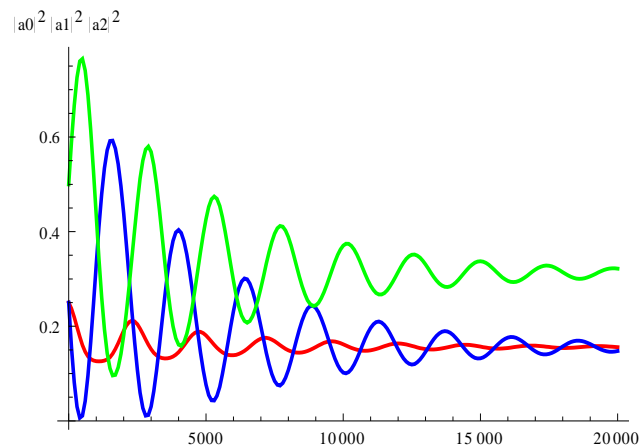
**Рисунок 3.12.** Зависимость параметра Шмидта с учетом континуума (черная кривая) и вероятности ионизации (красная кривая) от времени для V – схемы в случае  $\frac{d}{\Omega} = \sqrt{8}$ , ( $\Omega = 1$  эВ), начальной разности фаз  $\phi = \pi$  начальных амплитуд заселения атомных уровней  $C_1 = C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ;  $C_0 = 0$ ,  $\psi|_{t=0} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\sqrt{2}} \Phi_1$  Время представлено в атомных единицах.

С точки зрения параметра Шмидта такой выбор начальных условий позволяет создать состояние с высокой степенью перепутанности, большей, чем при начальных условиях  $\Omega \gg \Gamma, d$ ,  $\psi|_{t=0} = \frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{\sqrt{2}} \Phi_1$  (рисунок 3.12, черная кривая), что связано, во-первых, с ненулевой вероятностью заселения континуума в процессе динамики системы, а во-вторых, с оптимальным подбором соотношения между частотой Раби  $\Omega$  и расстоянием между дискретными уровнями  $d$  (такое соотношение между параметрами следует из вида стабильной квазиэнергетической волновой функции (3.32)). Таким образом, в данном случае параметр Шмидта в процессе динамики достигает

своего максимального значения  $K = 3$ , однако затем несколько уменьшается и становится равным  $K = \frac{8}{3}$ , что непосредственно следует из выражения для параметра Шмидта с учетом континуума (3.38), так как в данном случае в пределе больших времен вероятность ионизации, вероятность заселения резонансного состояния и суммарная вероятность заселения двух других атомных уровней оказываются равными  $W_i = \frac{1}{2}$ ,  $W_0 = \frac{1}{4}$ ,  $W_1 + W_2 = \frac{1}{4}$  соответственно. Таким образом, в данном случае из изначально приготовленного чистого состояния в процессе взаимодействия атома с квантовым полем, представленным одним фотоном, образуется стабильное состояние с высокой степенью перепутанности в пределе больших времен, причем экспериментальная реализация способствующих этому начальных условий не представляет особой сложности.

Однако если в начальный момент времени отличны от нуля не только амплитуды  $a_{11}$  и  $a_{21}$ , но и амплитуда  $a_{02}$  (то есть вероятность присутствия в системе двух фотонов в начальный момент времени отлична от нуля), то система является перепутанной уже в начальный момент времени. В таком случае задание в начальный момент времени стабильной квазиэнергии  $\gamma_0$  при любом соотношении между параметрами  $d$  и  $\Omega$  приводит к тому, что система не распадается с течением времени. Поэтому при соответствующем подборе параметров  $d$  и  $\Omega$  можно добиться максимальной степени перепутанности для V – системы без ионизации  $K = 2$ : при исследовании (3.39) на экстремум следует, что параметр Шмидта принимает максимальное значение при  $\frac{d}{\Omega} = \sqrt{8}$ . В таком случае с учетом нормировки  $W_0 = \frac{1}{2}$ ,  $W_1 = W_2 = \frac{1}{4}$ ; параметр Шмидта  $K = \frac{(W_0+W_1+W_2)^2}{(W_1+W_2)^2+W_0^2} = 2$  на протяжении всего времени наблюдения за системой, то есть система в любой момент времени является перепутанной, но так как в такой системе нет ионизации, то большие значения меры перепутанности получить не представляется возможным.

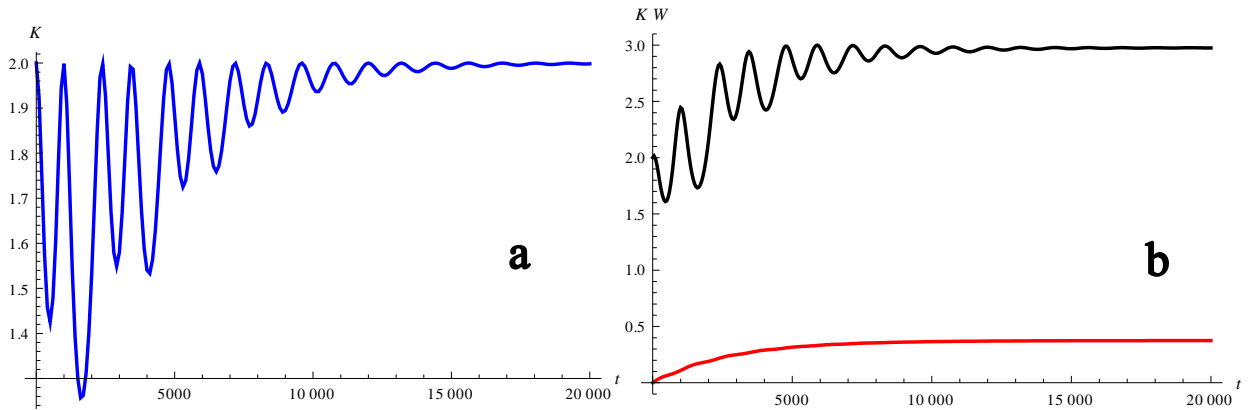
Однако если изменить начальную разность фаз заселения атомных уровней на  $\frac{\pi}{2}$  (то есть задать режим, в котором будет присутствовать в определенной степени ионизация, но также будет наблюдаться эффект стабилизации), то в системе будет задана суперпозиция квазиэнергий, при этом амплитуды вероятности заселения атомных уровней будут практически одинаковы в начальный момент времени:  $\psi|_{t=0} = ((\varphi_1 + i\varphi_2)\Phi_1 + \frac{d}{2\Omega}\varphi_0\Phi_2) * A$  (для этого необходимо, чтобы параметры  $d$  и  $\Omega$  были одного порядка, в частности,  $\frac{d}{\Omega} = \sqrt{8}$ ). В процессе динамики системы с таким начальным состоянием населенности атомных уровней уменьшаются за счет распада нестабильных квазиэнергетических состояний, но после окончательного распада последних, в тот момент, когда в системе остается только населенность, связанная со стабильным квазиэнергетическим состоянием, значения населенностей атомных уровней выходят на постоянное значение, причем различие в заселенности резонансного и двух других уровней атома (рассматривается их сумма) несущественно (рисунок 3.13).



**Рисунок 3.13.** Зависимость населенности резонансного состояния (зеленая кривая) и двух других уровней атома (красная и синяя кривые) от времени для V – схемы в случае начальной разности фаз  $\phi = \frac{\pi}{2}$ , начальных амплитуд заселения атомных уровней  $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$ ;  $C_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ;  $\Omega = \frac{0.1}{\sqrt{8}}$  эВ,  $\psi|_{t=0} = ((\varphi_1 + i\varphi_2)\Phi_1 + \frac{d}{2\Omega}\varphi_0\Phi_2) * A$ . Время представлено в атомных единицах.

Поэтому при таком задании начальных условий согласно (3.36) система должна быть максимально перепутана. Кроме того, вследствие ненулевой

начальной заселенности стабильной квазиэнергии система проявляет значительную стабилизацию (рисунок 3.14(b), красная кривая). В самом деле, параметр Шмидта с учетом и без учета континуума для такого начального состояния достигает своего максимального значения:  $K = 2$  без учета континуума и  $K = 3$  с учетом континуума (рисунок 3.14).



**Рисунок 3.14.** Зависимость параметра Шмидта **a)** без учета континуума и **b)** с учетом континуума (черная кривая), а также вероятности ионизации (красная кривая) от времени для  $V$  – схемы в случае начальной разности фаз  $\phi = \frac{\pi}{2}$ , начальных амплитуд заселения атомных уровней  $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$ ;  $C_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ;  $\Omega = \frac{0.1}{\sqrt{8}}$  эВ,  $\psi|_{t=0} = ((\varphi_1 + i\varphi_2)\Phi_1 + \frac{d}{2\Omega}\varphi_0\Phi_2) * A$ . Время представлено в атомных единицах.

Итак, в данном случае система перепутана на протяжении всей динамики, причем в пределе  $t \rightarrow \infty$  система стабилизируется, дальнейшей ионизации не происходит, а перепутанность системы достигает максимального значения  $K = 3$  и остается постоянной, то есть наблюдается стабильный волновой пакет с высокой степенью перепутанности на достаточно больших временах. Таким образом, уже для системы  $V$  – типа с одним фотоном возможно создание максимальной перепутанности между атомной и полевой подсистемой, причем с течением времени степень корреляций не уменьшается.

Экспериментальное измерение параметра Шмидта в данном случае может быть основано на измерении вероятности нахождения одного, двух и нуля фотонов в системе соответственно. Другим вариантом согласно (3.38) является измерение вероятности ионизации системы  $W_{ion} = \int_0^\infty a_{E0} a_{E0}^* dE$ , а также населенностей трех атомных уровней  $|a_{02}|^2$ ,  $|a_{11}|^2$ ,  $|a_{21}|^2$ . Данные

методы позволяют восстановить полевую матрицу плотности, то есть получить исчерпывающую информацию о полевой подсистеме, однако атомная матрица плотности такими методами восстановлена быть не может, поскольку включает в себя диагональные элементы. Для восстановления атомной матрицы плотности целесообразно применять последующее классическое лазерное поле к атому, находящемуся в смешанном состоянии после взаимодействия с квантовым полем.

*Б) В начальный момент времени заселены все три атомных уровня.*

В случае заселения в начальный момент времени всех трех атомных уровней (фотон в системе по-прежнему один) волновая функция в начальный момент времени принимает вид:

$$\Psi|_{t=0} = (C_0\varphi_0 + C_1\varphi_1 + C_2e^{i\Phi}\varphi_2)\Phi_1, \quad (3.40)$$

где  $C_1^2 + C_2^2 + C_0^2 = 1$ . За счет заселения резонансного состояния при учете нахождения одного фотона в системе возникают новые переходы: в процессе взаимодействия отличными от нуля становятся амплитуды  $a_{01}, a_{02}, a_{11}, a_{10}, a_{21}, a_{20}, a_{E0}$ . Как следствие, количество дифференциальных уравнений увеличивается до шести, но они разбиваются на две независимые группы по три дифференциальных уравнения в каждой:

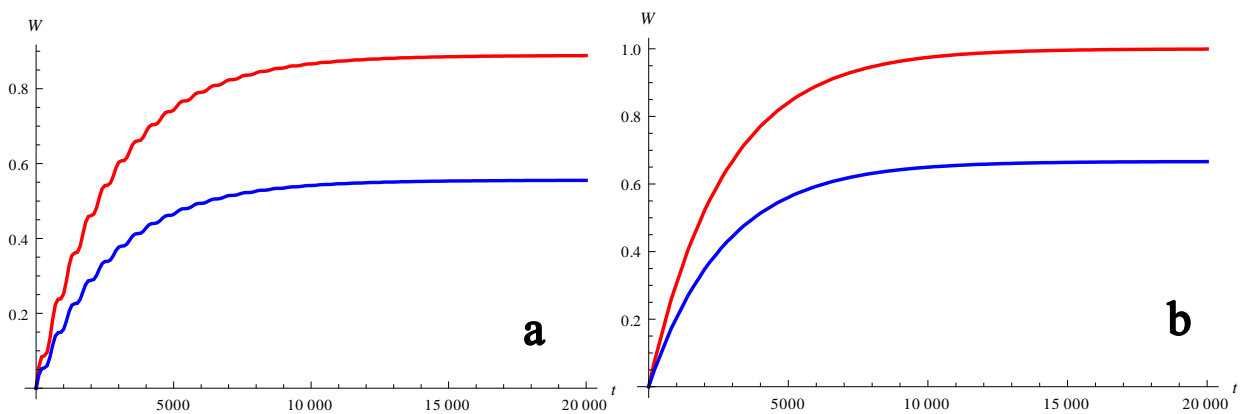
$$\begin{cases} i\hbar \frac{da_{02}}{dt} = E_0 a_{02} + \Omega a_{11} + \Omega a_{21} \\ i\hbar \frac{da_{11}}{dt} = \Omega a_{02} + (E_1 - \hbar\omega - \frac{i\Gamma}{2})a_{11} - \frac{i\Gamma}{2} a_{21}, \\ i\hbar \frac{da_{21}}{dt} = \Omega a_{02} + (E_2 - \hbar\omega - \frac{i\Gamma}{2})a_{21} - \frac{i\Gamma}{2} a_{11} \end{cases} \quad (3.41)$$

$$\begin{cases} i\hbar \frac{da_{01}}{dt} = E_0 a_{01} + \Omega a_{10} + \Omega a_{20} \\ i\hbar \frac{da_{10}}{dt} = \Omega a_{01} + (E_1 - \hbar\omega)a_{10}. \\ i\hbar \frac{da_{20}}{dt} = \Omega a_{01} + (E_2 - \hbar\omega)a_{20} \end{cases} \quad (3.42)$$

При этом решение системы (3.41) совпадает с решением задачи, описанной выше, в которой в начальный момент времени резонансное состояние не

заселено, в то время как система уравнений (3.42) описывает осцилляции Раби – изменение населенности дискретных уровней (переходы через резонансное состояние) без ионизации. Таким образом, заселение в начальный момент времени всех трех атомных состояний при наличии одного фотона предполагает более богатую динамику системы, в которой к тому же должны наблюдаться все описанные ранее явления.

Итак, система (3.42) описывает динамику атомной фракции, остающуюся в связанном состоянии в процессе ионизации системы, величина этой фракции непосредственно связана с заселенностью амплитуды  $a_{01}$  в начальный момент времени: чем больше заселенность резонансного уровня в момент  $t = 0$ , тем большую стабильность проявляет система по отношению к процессу ионизации (рисунок 3.15). Даже при начальной заселенности высоковозбужденных уровней атома синфазно, то есть при задании суперпозиции распадающихся квазиэнергетических состояний в начальный момент времени, система полностью не ионизируется, что связано с удержанием в связанном состоянии начальной заселенности резонансного уровня посредством осцилляций Раби. Однако если резонансное состояние в начальный момент времени не заселено, система полностью распадается (рисунок 3.15).



**Рисунок 3.15.** Зависимость вероятности ионизации от времени для V – схемы в случае **а)**  $C_1 = C_2 = \frac{2}{3}$ ;  $C_0 = \frac{1}{3}$ ;  $\phi = 0$ ,  $\Omega = 0.1$  эВ (красная кривая);  $C_1 = C_2 = \frac{\sqrt{2.5}}{3}$ ;  $C_0 = \frac{2}{3}$ ;  $\phi = 0$ ,  $\Omega = 0.1$  эВ (синяя кривая), **б)**  $C_1 = C_2 = C_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ;  $\phi = 0$ ,  $\Omega = 1$  эВ (синяя кривая);  $C_1 = C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} C_0 = 0$ ;  $\phi = 0$ ,  $\Omega = 1$  эВ (красная кривая). Время представлено в атомных единицах.



Таким образом, варьируя лишь амплитуду вероятности заселения резонансного состояния в начальный момент времени, можно менять ту часть атомной заселенности, которая останется в связанном состоянии вне зависимости от параметров  $\Omega$  и  $\Gamma$  (рисунок 3.15). Данная задача также была решена аналитически.

Для анализа степени квантовых корреляций, возникающих в системе, по-прежнему будем использовать параметр Шмидта. Для этого запишем полную матрицу плотности системы и произведем редуцирование по атомным переменным, при этом перепутывание может быть рассмотрено как для связанной атомной фракции (без учета континуума), так и для всей системы с учетом заселенности, переведенной в континуум (с учетом континуума). Соответствующие редуцированные полевые матрицы плотности имеют вид:

перенормированная без учета континуума:

$$\tilde{\rho}_r = \frac{1}{W_b} \begin{pmatrix} |a_{10}|^2 + |a_{20}|^2 & a_{10}a_{11}^* + a_{20}a_{21}^* & 0 \\ a_{10}^*a_{11} + a_{20}^*a_{21} & |a_{01}|^2 + |a_{11}|^2 + |a_{21}|^2 & a_{02}^*a_{01} \\ 0 & a_{01}^*a_{02} & |a_{02}|^2 \end{pmatrix}, \quad (3.43)$$

с учетом континуума:

$$\rho_r = \begin{pmatrix} |a_{10}|^2 + |a_{20}|^2 + \int_0^\infty a_{E0} a_{E0}^* dE & a_{10}a_{11}^* + a_{20}a_{21}^* & 0 \\ a_{10}^*a_{11} + a_{20}^*a_{21} & |a_{01}|^2 + |a_{11}|^2 + |a_{21}|^2 & a_{02}^*a_{01} \\ 0 & a_{01}^*a_{02} & |a_{02}|^2 \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

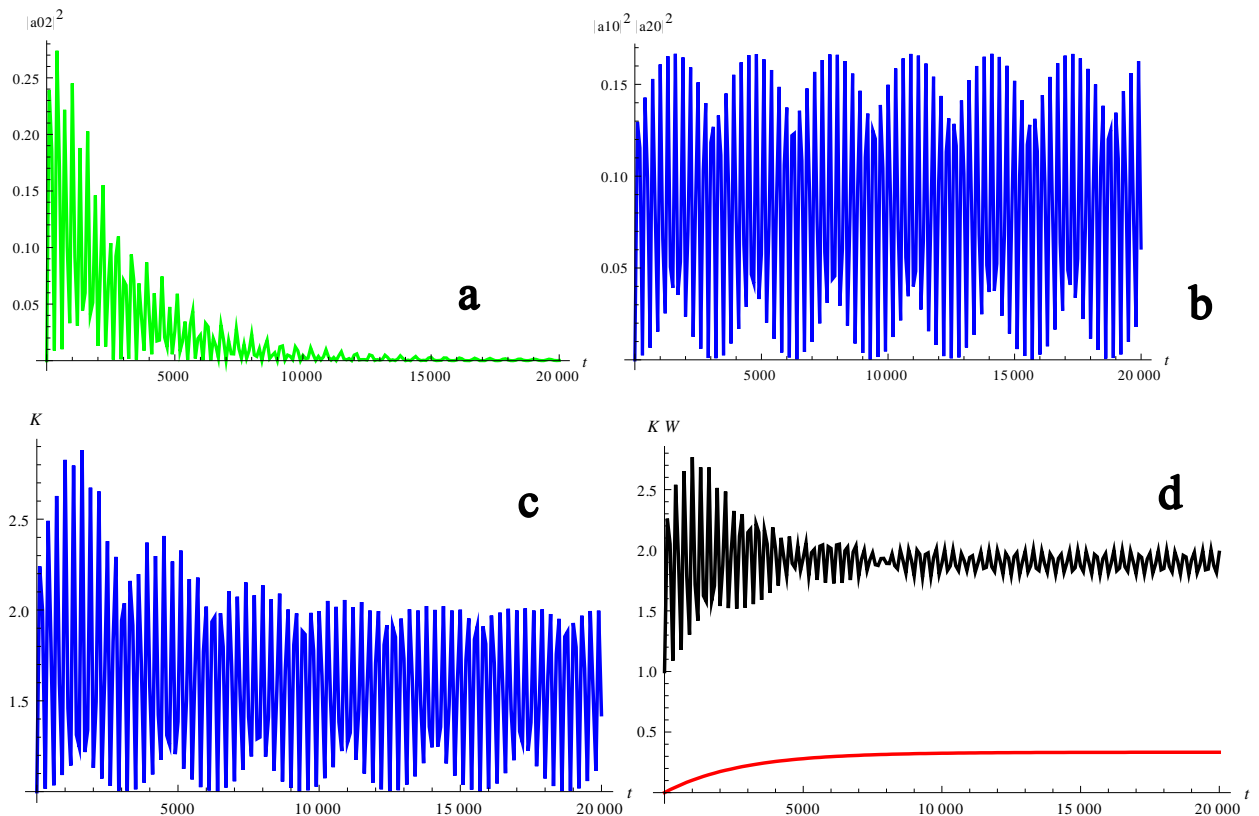
В связи с увеличением числа амплитуд вероятности выражение для параметра Шмидта представляет более громоздкую структуру, однако допускает количественный анализ.

Так, например, согласно выражению для редуцированной матрицы плотности без учета континуума (3.43) параметр Шмидта  $K = Tr(\tilde{\rho}_r^2)^{-1}$  (может достигать максимального значения  $K_{max} = 3$ ) обращается в единицу  $K = 1$  только в тех точках по времени, где амплитуды вероятности  $a_{10}$  и  $a_{20}$

обращаются в ноль, что периодически происходит согласно осцилляциям с частотой Раби (рисунок 3.16(b)) Действительно, ввиду наличия ионизации амплитуда  $a_{02}$  с течением времени становится равной нулю (рисунок 3.16(a)), и в указанных точках по времени, где  $a_{10} = a_{20} = 0$ , редуцированная матрица плотности без учета континуума имеет вид:

$$\tilde{\rho} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & |a_{01}|^2 + |a_{11}|^2 + |a_{21}|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.45)$$

то есть состояние является чистым, система распутана. В другие моменты времени система перепутана. Таким образом, зависимость параметра Шмидта без учета континуума от времени имеет типичный осцилляционный характер: система распутывается и запутывается с частотой Раби (рисунок 3.16(c)).



**Рисунок 3.16.** Зависимость **a)** амплитуды вероятности заселения резонансного состояния  $|a_{02}|^2$  при наличии двух фотонов в системе, **b)** амплитуд вероятности заселения двух других атомных уровней  $|a_{10}|^2, |a_{20}|^2$  при отсутствии фотонов в системе, **с)** параметра Шмидта без учета континуума, **d)** параметра Шмидта с учетом континуума (черная кривая) и вероятности ионизации (красная кривая) от времени для V – схемы в случае  $C_1 = C_2 = C_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ;  $\phi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\Omega = 1$  эВ. Время представлено в атомных единицах

Однако при учете континуума даже в моменты обращения в ноль амплитуд  $a_{10}$  и  $a_{20}$   $a_{10} = a_{20} = 0$ , а также амплитуды, отвечающей резонансному состоянию  $a_{02}$ , редуцированная матрица плотности имеет вид:

$$\rho_r = \begin{pmatrix} \int_0^\infty a_{E0} a_{E0}^* dE & 0 & 0 \\ 0 & |a_{01}|^2 + |a_{11}|^2 + |a_{21}|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.46)$$

то есть система является перепутанной на протяжении всей динамики, причем степень перепутанности в процессе ионизации достаточно велика: параметр Шмидта практически достигает своего максимального значения для данной системы  $K = 3$ , однако в пределе больших времен, когда вероятность ионизации больше не возрастает, выходит на уровень  $K \sim 2$  (рисунок 3.16(d)). После установления режима стабилизации системы степень перепутанности практически не меняется. Небольшие осцилляции параметра Шмидта связаны с осцилляциями Раби, в которых участвует та доля населенности, которая в начальный момент времени содержалась в амплитуде вероятности  $a_{01}$ . При этом стоит отметить, что в случае заселения в начальный момент времени всех трех дискретных атомных уровней величина параметра Шмидта оказывается меньше по сравнению со случаем, когда в начальный момент времени резонансное состояние не заселено, что связано с появлением недиагональных матричных элементов в (3.44) по сравнению с (3.36), а также с увеличением вероятности присутствия одного фотона в системе, отвечающего заселению резонансного состояния и не ведущего к ионизации атома. Поэтому возможность равновероятного заселения состояний континуума и дискретных атомных уровней в процессе динамики системы уменьшается, а следовательно, степень корреляции между атомной и полевой подсистемой понижается. Таким образом, заселение в начальный момент времени резонансного состояния приводит к эффективным осцилляциям Раби, способствующим установлению

стабилизационного режима, и препятствующих получению максимальной степени перепутанности системы на больших временах.

### **3.3. Взаимодействие классического лазерного поля с модельным ридберговским атомом, приготовленным в смешанном состоянии посредством воздействия на него квантового поля нескольких фотонов.**

Как было показано в разделах 3.1 и 3.2, взаимодействие ридберговского атома с квантовым полем приводит к созданию перепутанной атомно-полевой системы и нахождению атома в смешанном состоянии. При этом возникает вопрос об экспериментальном измерении степени перепутанности такой системы и восстановлении матрицы плотности смешанного атомного состояния посредством анализа его динамики в классическом лазерном поле. Не менее интересна и сама динамика такого смешанного состояния в классическом поле: известно, что интерференционная стабилизация чувствительна к разности фаз между ридберговскими состояниями, однако в случае, когда система находится в смешанном состоянии, информация о фазах претерпевает изменения вплоть до полного исчезновения в случае термодинамического состояния.

В данном разделе рассматривается динамика в классическом лазерном поле модельного ридберговского атома, включающего несколько дискретных уровней и континуум и приготовленного изначально в смешанном состоянии посредством взаимодействия с квантовым полем; анализируются возможные режимы интерференционной стабилизации и влияние недиагональных элементов начальной матрицы плотности на последующую динамику системы. Также рассматривается возможность извлечения информации о начальной смешанной атомной матрице плотности посредством измерения

вероятности ионизации и вероятности остаточной атомной заселенности в классическом лазерном поле [3].

### 3.3.1. Аналитическая модель.

Взаимодействие между атомом, находящимся в смешанном состоянии, и классическим полем в представлении матрицы плотности описывается нестационарным уравнением:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H}_{at} + \hat{V}_{int}, \hat{\rho}], \quad (3.47)$$

где  $\hat{H}_{at}$  - атомный гамильтониан,  $\hat{V}_{int} = -\vec{d}\vec{\epsilon}_0 \cos(\omega t)$  - оператор атомно-полевого взаимодействия в дипольном приближении,  $\vec{d}$  - дипольный момент атомного электрона,  $\vec{\epsilon}_0$  - напряженность классического лазерного поля.

В данном разделе ридберговский атом рассматривается в модели “3 связанных уровня и континуум” и характеризуется двумя высоковозбужденными ридберговскими уровнями, перезаселение которых происходит индуцированными полем  $\Lambda$ -переходами через континуум и  $V$  - переходами через резонансное связанное нижележащее состояние. Собственные функции атомных состояний удовлетворяют стационарному уравнению Шредингера:

$$\hat{H}_{at}\varphi_n = E_n\varphi_n, \quad \hat{H}_{at}\varphi_E = E\varphi_E, \quad (3.48)$$

где  $n = 0, 1, 2$ ,  $\varphi_n$ ,  $E_n$  и  $\varphi_E$ ,  $E$  представляют волновые функции и собственные значения связанных состояний атома и континуума соответственно.

Частота лазерного поля выбирается таким образом, чтобы обеспечить точное выполнение условия резонанса между нижележащим состоянием и серединой между двумя высоковозбужденными ридберговскими уровнями; предполагается, что переходы между нижележащим атомным состоянием и континуумом пренебрежимо малы. Обозначенные условия соответствуют водородоподобному иону с зарядом ядра  $Z$ , в котором дублет тонкой

структуры  $n P_{\frac{1,3}{2,2}}(\varphi_1, \varphi_2)$  выступает в качестве высоковозбужденных соседних ридберговских уровней, а состояние  $n_0 S(\varphi_0)$  – в качестве нижележащего резонансного состояния. Предполагается, что частота лазерного поля намного больше тонкого расщепления дублета  $n P_{\frac{1,3}{2,2}}(\varphi_1, \varphi_2)$  по энергии  $\Delta = E_2 - E_1$  и характеризуется значением  $\hbar\omega \approx 2eV$ , что соответствует энергетическим уровням с номерами  $n = 6, n_0 = 4$  и заряду ядра  $Z = 2$ .

В начальный момент времени атом полагается в некотором смешанном состоянии, сформированном в процессе взаимодействия атома с квантовым полем из нескольких фотонов, однако в общем случае в качестве начального состояния может быть рассмотрено произвольное смешанное атомное состояние. Процессы релаксации в данной модели не учитываются, так как их характерное время  $10^{-9}$  с намного больше всех характерных времен атомной динамики в лазерном поле.

Используя упомянутый выше базис дискретных и непрерывных атомных состояний и проводя процедуру адиабатического исключения континуума [97], была получена система дифференциальных уравнений для элементов матрицы плотности, соответствующих связанным атомным состояниям:

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{d\rho_{01}}{dt} &= \frac{\Delta}{2}\rho_{01} + \Omega(\rho_{11} + \rho_{21} - \rho_{00}) - i\frac{\Gamma}{2}(\rho_{01} + \rho_{02}) \\
 i\hbar \frac{d\rho_{02}}{dt} &= -\frac{\Delta}{2}\rho_{02} + \Omega(\rho_{12} + \rho_{22} - \rho_{00}) - i\frac{\Gamma}{2}(\rho_{01} + \rho_{02}) \\
 i\hbar \frac{d\rho_{00}}{dt} &= \Omega(\rho_{10} + \rho_{20} - \rho_{01} - \rho_{02}) \\
 i\hbar \frac{d\rho_{11}}{dt} &= \Omega(\rho_{01} - \rho_{10}) - i\Gamma\left(\frac{\rho_{12} + \rho_{21}}{2} + \rho_{11}\right) \\
 i\hbar \frac{d\rho_{22}}{dt} &= \Omega(\rho_{02} - \rho_{20}) - i\Gamma\left(\frac{\rho_{12} + \rho_{21}}{2} + \rho_{22}\right) \\
 i\hbar \frac{d\rho_{12}}{dt} &= -\Delta\rho_{12} + \Omega(\rho_{02} - \rho_{10}) - i\Gamma\left(\frac{\rho_{11} + \rho_{22}}{2} + \rho_{12}\right),
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

где  $\hbar\omega = \frac{E_1 + E_2}{2} - E_0$ ,  $\Delta = E_2 - E_1$ ,  $E_0, E_1, E_2$  - энергии атомных связанных состояний,  $\Omega = \frac{d_{0n}\varepsilon_0}{2\hbar}$  - частота Раби резонансного перехода,  $\Gamma_{mn} = \frac{2\pi\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^2 d_{mE}d_{En}^*}{\hbar}$  - элементы тензора скорости ионизации, вычисленные по “Золотому Правилу Ферми” и предполагаемые одинаковыми для всех переходов и равными  $\Gamma$ .

Вследствие громоздкости аналитических вычислений система уравнений (3.49) решалась численно. В качестве начального состояния было выбрано состояние, приготовленное в процессе атомно-полевого взаимодействия, описанного в разделе 3.2, однако в качестве начального состояния может быть выбрано любое другое состояние: предлагаемый подход в терминах матрицы плотности является достаточно общим и включает как чистое, так и смешанное начальное состояние атома.

Решение системы (3.49) позволяет получить заселенность связанных ридберговских состояний в произвольный момент времени:

$$W_1(t) = \rho_{11}(t), \quad W_2(t) = \rho_{22}(t), \quad W_0(t) = \rho_{00}(t), \quad (3.50)$$

а также вероятность ионизации системы

$$W_i = 1 - (\rho_{00} + \rho_{11} + \rho_{22}). \quad (3.51)$$

Для анализа степени изменения начального смешанного состояния атома в процессе его взаимодействия с лазерным полем был введен параметр “чистоты” системы  $P$ , который является количественной степенью чистоты атомной системы и равен следу квадрата атомной матрицы плотности.

$$P = Tr[\rho^2]. \quad (3.52)$$

Так как след матрицы плотности равен единице в силу нормировки  $Tr[\rho] = 1$ , а также для чистого состояния выполнено соотношение  $\rho = \rho^2$ , то величина  $P = 1$  соответствует чистому атомному состоянию, которое может характеризоваться волновой функцией, в то время как  $P < 1$  соответствует смешанному состоянию атома. Таким образом, чем ближе параметр  $P$  к единице, тем ближе атомное состояние к чистому состоянию. Так как

система (3.49) предполагает возможным распад элементов матрицы плотности за счет ионизации атома, требуется производить процедуру перенормировки параметра  $P$  в каждый момент времени:

$$P(t) = \frac{\rho_{00}^2 + \rho_{11}^2 + \rho_{22}^2 + 2\rho_{12}\rho_{21} + 2\rho_{10}\rho_{01} + 2\rho_{20}\rho_{02}}{(\rho_{00} + \rho_{11} + \rho_{22})^2}. \quad (3.53)$$

Как упоминалось, рассматриваемый метод, базирующийся на формализме матрицы плотности, является общим методом описания взаимодействия модельного ридберговского атома с классическим лазерным полем и справедлив как для чистого, так и для смешанного начального атомного состояния, поэтому в случае начальной матрицы плотности, соответствующей чистому состоянию, из решения системы (3.49) автоматически получаются результаты, полученные ранее в [98], где использовался формализм волновой функции.

### **3.3.2. Динамика смешанного состояния модельного атома в классическом лазерном поле.**

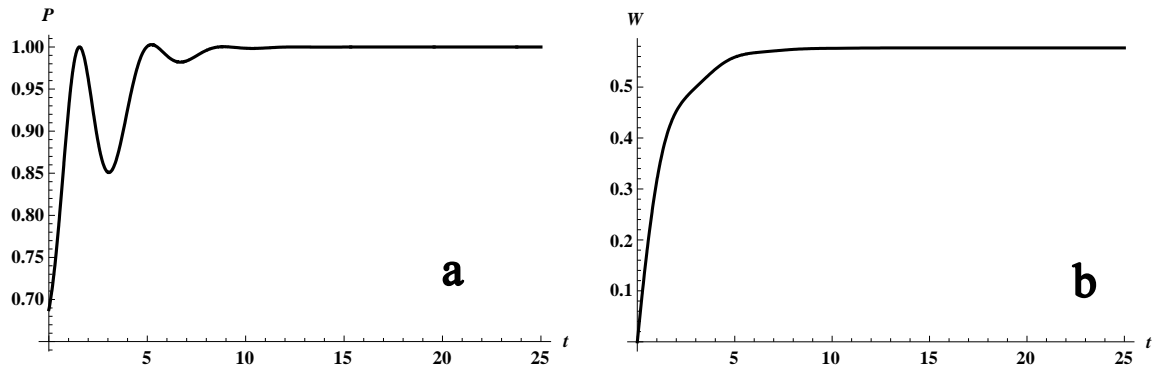
Для решения рассматриваемой задачи в более общем виде в качестве начального атомного состояния было выбрано произвольное смешанное состояние. Аналогично [98] рассматривался режим достаточно сильного поля, в котором частота Раби резонансного перехода  $\Omega$  – самый большой энергетический параметр в системе и выполнены соотношения  $\Omega \gg \Delta$ ,  $\Omega \gg \Gamma$ . Яркой особенностью атомной динамики, индуцированной полем в таком случае, является трансформация начального смешанного атомного состояния в чистое состояние посредством атомно-полевого взаимодействия в течение достаточно короткого интервала времени. Типичная зависимость вероятности ионизации, а также параметра “чистоты” от времени представлена на рисунке 3.17(a) и рисунке 3.17(b), вычисления проведены



для следующей начальной матрицы плотности с неравными нулю матричными элементами:

$$\rho|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 - 0.1i & 0.1 + 0.3i \\ 0.2 + 0.1i & 0.2 & 0.1 - 0.2i \\ 0.1 - 0.3i & 0.1 + 0.2i & 0.3 \end{pmatrix}. \quad (3.54)$$

Нетрудно заметить, что в течение атомно-полевого взаимодействия значение параметра “чистоты” достигает достаточно быстро своего максимального значения, равного единице (рисунок 3.17(a)). Таким образом, когерентное лазерное поле переводит изначально смешанное атомное состояние в чистое состояние, наводя определенную фазу между волновыми функциями в когерентной суперпозиции связанных ридберговских состояний, формирующихся в процессе взаимодействия.



**Рисунок 3.17.** а) параметр “чистоты” и б) вероятность ионизации системы в зависимости от времени в периодах поля.

Наблюдаемый переход атомной системы из смешанного в чистое состояние сопровождается достаточно эффективной атомной ионизацией, вероятность которой претерпевает насыщение при некотором значении, много меньшем единицы (рисунок 3.17(b)). Это значит, что наведенный полем процесс ионизации ведет к “вычищению” связанной атомной фракции таким образом, что формирующийся при этом волновой пакет характеризуется высоким сопротивлением по отношению к дальнейшей ионизации. Поэтому система полностью не ионизируется даже в пределе больших времен, при этом вероятность ионизации выходит на постоянное значение и никогда не достигает единицы, то есть режим интерференционной стабилизации имеет место. Стоит подчеркнуть, что интерференционная стабилизация является

известным результатом для случая, когда ридберговские уровни имеют определенную разность фаз, однако, в случае смешанного состояния информация о фазе стирается. Таким образом, когерентное лазерное поле приводит когерентность в некогерентное состояние и наводит соответствующие фазовые соотношения.

В режиме стабилизации остаточная заселенность связанных атомных состояний характеризуется стабильной квазиэнергетической волновой функцией:

$$\psi_{\gamma_0}^{QES} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{\Delta^2}{8\Omega^2}\right)}} \left( \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\sqrt{2}} + \frac{\Delta}{\sqrt{8}\Omega} \varphi_0 \right). \quad (3.55)$$

Выражение (3.55) в точности совпадает с квазиэнергетическим состоянием, которое было найдено в процессе взаимодействия лазерного поля с чистым атомным состоянием и также может быть получено при использовании формализма Шредингера, применяемого при соответствующих резонансных условиях к системе, содержащей одно нижележащее ридберговское состояние.

Таким образом, основная черта атомной динамики в классическом лазерном поле – формирование чистого атомного состояния, которое также является стабильным квазиэнергетическим состоянием системы. Данный эффект имеет общий характер и наблюдается для произвольного начального смешанного состояния, включая различные чистые состояния, а также термодинамическую смесь со всеми недиагональными матричными элементами, равными нулю. Последний случай наиболее интересен, так как вся информация о фазе в таком состоянии отсутствует.

Из (3.49) может быть найдена связь между вероятностью ионизации и матричными элементами начальной матрицы плотности:

$$W_{ion} = 1 - W_b = 1 - \rho_{00}|_{t \rightarrow \infty} - \rho_{11}|_{t \rightarrow \infty} - \rho_{22}|_{t \rightarrow \infty} =$$

$$\begin{aligned}
&= 1 \\
&- \frac{1}{1 + \frac{\Delta^2}{8\Omega^2}} \left[ \frac{\Delta^2}{8\Omega^2} \rho_{00}|_{t=0} + \frac{\rho_{11}|_{t=0} + \rho_{22}|_{t=0}}{2} - \text{Re}\rho_{12}|_{t=0} \right. \\
&\left. + \frac{\Delta}{2\Omega} (\text{Re}\rho_{10}|_{t=0} - \text{Re}\rho_{20}|_{t=0}) \right] \quad (3.56)
\end{aligned}$$

Например, в случае, представленном на рисунке 3.17, отношение  $\frac{\Delta^2}{8\Omega^2} = 1$  и из (3.56), используя начальное условие (3.54), можно получить  $W_{ion} = 0.6043$ . Однако обратный процесс – восстановление информации о начальном смешанном атомном состоянии из динамики ионизации системы не представляется таким простым: все элементы начальной матрицы плотности должны быть найдены, в то время как непосредственно измеренными могут быть только диагональные элементы матрицы плотности, ведь диагональные элементы – не что иное, как вероятность заселения ридберговских состояний. Поэтому путем прямых экспериментальных измерений степень перепутанности, возникающая в процессе взаимодействия атома с квантовым полем измерена быть не может.

### 3.3.3. Восстановление матрицы плотности смешанного атомного состояния посредством приложения классического лазерного поля.

Однако в определенных случаях эта проблема может быть решена, например, когда смешанное атомное состояние приготовлено посредством взаимодействия атома с квантовым полем, включающим только несколько фотонных состояний. Последующее приложение к такому смешанному состоянию классического лазерного поля позволяет экспериментально измерить степень перепутанности, возникшей между атомной и квантово-полевой подсистемами в процессе их взаимодействия.

Итак, согласно вышесказанному в разделе 3.2, матрица плотности, описывающая стабильное смешанное атомное состояние, возникающее после

взаимодействия атома с квантовым полем, включающим несколько фотонов, в общем виде может быть представлена следующим образом:

$$\rho|_{t=0} = \begin{pmatrix} \rho_{00} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{11} & \rho_{21} \\ 0 & \rho_{12} & \rho_{22} \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

Данная матрица плотности может быть найдена из эволюции системы “атом + квантовое поле”, в процессе которой система переходит в двухчастичное квазиэнергетическое состояние, аналогичное (3.32):

$$\psi^{\text{QES}} = \left( \alpha \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\sqrt{2}} \Phi_{k-1} + \beta \varphi_0 \Phi_k \right), \quad (3.58)$$

где  $\Phi_k$  -  $k$ -фотонное фоковское состояние, амплитуды  $\alpha, \beta$  определяются атомными и квантово-полевыми параметрами, а также подчиняются условию нормировки:  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ .

Соответствующая (3.58) редуцированная по полевым переменным матрица плотности, описывающая атом в квантовом поле в стабильном состоянии выглядит следующим образом:

$$\rho_r^{\text{at}} = \frac{|\alpha|^2}{2} \begin{pmatrix} \frac{2|\beta|^2}{|\alpha|^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

Важно отметить, что такая матрица имеет нулевые элементы:  $\rho_{10} = \rho_{20} = \rho_{01} = \rho_{02} = 0$  вследствие резонансных переходов  $\varphi_0 \leftrightarrow \varphi_{1,2}$ , благодаря которым резонансное состояние и два вышележащих ридберговских уровня всегда связаны с разным числом фотонов.

Для упрощения вычислений удобно перейти от изначального базиса связанных атомных состояний к новому базису, который переводит матрицу (3.57) в диагональную. Этот базис в точности совпадает с модами Шмидта, найденными для атомной подсистемы в случае стабильного состояния (3.58), описывающего перепутывание между атомом и квантовым полем, содержащим несколько фотонов. Решая задачу на собственные значения и собственные функции для редуцированной матрицы плотности (3.57), можно

получить следующие выражения для мод Шмидта или новый базис атомных состояний:

$$\tilde{\varphi}_0 = \varphi_0, \tilde{\varphi}_1 = \frac{\sqrt{\frac{\rho_{21}}{\rho_{12}}}\varphi_1 + \varphi_2}{\sqrt{2}}, \tilde{\varphi}_2 = \frac{\varphi_1 - \sqrt{\frac{\rho_{12}}{\rho_{21}}}\varphi_2}{\sqrt{2}}. \quad (3.60)$$

Как видно, базис мод Шмидта зависит от соотношения  $\frac{\rho_{21}}{\rho_{12}}$  и приводит начальную матрицу плотности к диагональному виду, в то время как в исходном базисе матрица была недиагональна. Однако диагональные элементы в таком базисе соответствуют заселению состояний Шмидта, экспериментальное измерение заселенности которых представляет непростую задачу. Но стоит отметить, что для квазиэнергетического состояния (3.58) матричные элементы  $\rho_{12}$  и  $\rho_{21}$  одинаковы  $\rho_{12} = \rho_{21}$ , при этом условии моды Шмидта не зависят от амплитуд  $\alpha, \beta$  и задаются выражениями:

$$\tilde{\varphi}_0 = \varphi_0, \tilde{\varphi}_1 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{\sqrt{2}}, \tilde{\varphi}_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\sqrt{2}}, \quad (3.61)$$

а начальное атомное смешанное состояние характеризуется следующей диагональной матрицей:

$$\tilde{\rho}|_{t=0} = \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_{00}|_{t=0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\rho}_{22}|_{t=0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\beta|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |\alpha|^2 \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

Поэтому для того, чтобы восстановить информацию о начальном смешанном состоянии атомной системы, достаточно восстановить информацию только об одном диагональном элементе в (3.62) (согласно условию нормировки), что соответствует проведению только одного измерения.

С другой стороны, система (3.49) может быть переписана в базисе Шмидта (3.61) следующим образом:

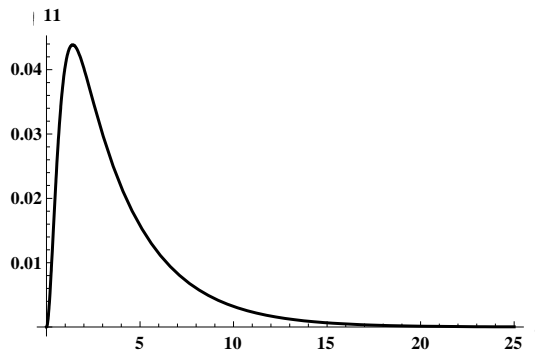
$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d\tilde{\rho}_{10}}{dt} &= -\frac{\Delta}{2}\tilde{\rho}_{20} - \sqrt{2}\Omega(\tilde{\rho}_{11} - \tilde{\rho}_{00}) - i\Gamma\tilde{\rho}_{10} \\ i\hbar \frac{d\tilde{\rho}_{20}}{dt} &= -\frac{\Delta}{2}\tilde{\rho}_{10} - \sqrt{2}\Omega\tilde{\rho}_{21} \\ i\hbar \frac{d\tilde{\rho}_{00}}{dt} &= \sqrt{2}\Omega(\tilde{\rho}_{10} - \tilde{\rho}_{01}) \end{aligned}$$

$$i\hbar \frac{d\tilde{\rho}_{11}}{dt} = -\sqrt{2}\Omega(\tilde{\rho}_{10} - \tilde{\rho}_{01}) - i\Gamma\tilde{\rho}_{11} - \frac{\Delta}{2}(\tilde{\rho}_{21} - \tilde{\rho}_{12}) \quad (3.63)$$

$$i\hbar \frac{d\tilde{\rho}_{22}}{dt} = \frac{\Delta}{2}(\tilde{\rho}_{21} - \tilde{\rho}_{12})$$

$$i\hbar \frac{d\tilde{\rho}_{21}}{dt} = -\sqrt{2}\Omega(\tilde{\rho}_{20} + \tilde{\rho}_{02}) - i\Gamma\tilde{\rho}_{21} - \frac{\Delta}{2}(\tilde{\rho}_{11} - \tilde{\rho}_{22})$$

Из (3.63) нетрудно заметить, что некоторые изначально равные нулю матричные элементы ( $Re[\tilde{\rho}_{10}], Im[\tilde{\rho}_{20}], Re[\tilde{\rho}_{21}]$ ) остаются равными нулю в течение всей динамики системы. Другие матричные элементы, равные также нулю в начальный момент времени ( $\tilde{\rho}_{11}, Im[\tilde{\rho}_{10}], Im[\tilde{\rho}_{21}]$ ), изменяются в процессе динамики системы, но все равно стремятся к нулю при выходе динамики системы на стабильный режим. Данная особенность – непосредственное следствие интерференционной стабилизации и формирования стабильного чистого атомного состояния (3.55) (из изначально смешанного состояния) в сильном классическом лазерном поле. На рисунке 3.18 представлена зависимость вероятности заселения изначально незаселенного состояния Шмидта  $\tilde{\varphi}_1$ : в процессе взаимодействия заселенность такого состояния возрастает, однако затем снова стремится к нулю при выходе системы на стабильный режим, где связанные атомные состояния характеризуются чистым квазиэнергетическим состоянием (3.55), не ионизирующемся в процессе дальнейшей динамики системы.



**Рисунок 3.18.** Вероятность заселения изначально незаселенного состояния Шмидта  $\tilde{\varphi}_1$  от времени в периодах поля.

В базисе Шмидта стабильная матрица плотности, соответствующая стабильному атомному состоянию (3.55), имеет вид:

$$\tilde{\rho}|_{t \rightarrow \infty} = \frac{W_b}{1 + \frac{\Delta^2}{8\Omega^2}} \begin{pmatrix} \frac{\Delta^2}{8\Omega^2} & 0 & \frac{\Delta}{\sqrt{8}\Omega} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Delta}{\sqrt{8}\Omega} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.64),$$

где  $W_b$  обозначает вероятность остаточного заселения атомных состояний в процессе динамики системы. Тот факт, что  $Tr[\tilde{\rho}|_{t \rightarrow \infty}] = W_b < 1$  - прямое следствие распада связанной атомной фракции в процессе ионизации. Таким образом, эволюция рассматриваемой атомной системы в классическом лазерном поле начинается со смешанного состояния (3.62) и выходит к чистому состоянию (3.64).

Стоит отметить, что в системе дифференциальных уравнений в базисе Шмидта (3.63) существует определенная комбинация элементов матрицы плотности  $S$ , которая сохраняется в процессе взаимодействия атома с лазерным полем, то есть ее производная равна нулю в любой момент времени:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \left[ \frac{\Delta^2}{8\Omega^2} \tilde{\rho}_{00} + \tilde{\rho}_{22} + \frac{\Delta}{\sqrt{8}\Omega} 2 Re[\tilde{\rho}_{20}] \right] \equiv i\hbar \frac{d}{dt} S = 0 \quad (3.65)$$

Это значит, что такая величина прямо пропорциональна остаточной населенности связанных состояний, выживающих в процессе взаимодействия атома с классическим лазерным полем. Таким образом, из (3.64) и (3.65) непосредственно получаем:

$$S = W_b \left( 1 + \frac{\Delta^2}{8\Omega^2} \right) \quad (3.66)$$

С другой стороны, величина  $S$  может быть получена из начальной матрицы плотности (3.62). Приравнявая оба выражения, получаем:

$$\frac{\Delta^2}{8\Omega^2} \tilde{\rho}_{00}|_{t=0} + \tilde{\rho}_{22}|_{t=0} + \frac{\Delta}{\sqrt{8}\Omega} 2 Re[\tilde{\rho}_{20}|_{t=0}] = W_b \left( 1 + \frac{\Delta^2}{8\Omega^2} \right). \quad (3.67)$$

С учетом того, что недиагональные элементы матрицы плотности в начальный момент времени равны нулю  $\tilde{\rho}_{20}|_{t=0} = 0$ , можно получить связь между ненулевыми (диагональными) элементами начальной матрицы плотности (3.62), описывающей начальное смешанное атомное состояние, и конечной вероятностью ионизации атома в лазерном поле.

$$\begin{aligned}
W_{ion} &= 1 - \rho_{00}|_{t \rightarrow \infty} - \rho_{11}|_{t \rightarrow \infty} - \rho_{22}|_{t \rightarrow \infty} \\
&= 1 - \frac{1}{1 + \frac{\Delta^2}{8\Omega^2}} \left[ \frac{\Delta^2}{8\Omega^2} \tilde{\rho}_{00}|_{t=0} + \tilde{\rho}_{22}|_{t=0} \right], \quad (3.68)
\end{aligned}$$

где диагональные элементы связаны друг с другом условием единичного следа. Полученное выражение (3.68) показывает, что измеряя вероятность ионизации ридберговского атома, приготовленного изначально в смешанном состоянии посредством взаимодействия с полем из нескольких фотонов, в классическом электромагнитном поле в режиме стабилизации, можно восстановить начальную атомную матрицу плотности в базисе Шмидта и, тем самым, вычислить степень перепутанности (параметр Шмидта) между атомом и квантовым полем в конце их взаимодействия (до момента приложения классического поля):

$$K^{-1} = \tilde{\rho}_{00}|_{t=0}^2 + \tilde{\rho}_{22}|_{t=0}^2 = P|_{t=0} \quad (3.69)$$

Таким образом, для измерения степени перепутанности системы “атом + квантовое поле” требуется лишь одно измерение вероятности ионизации.



## Заключение

В данной работе развит последовательный теоретический аналитический подход, позволяющий описывать пространственные свойства и пространственные корреляции в ярких сжатых состояниях света за рамками теории возмущений. Теоретический подход основан на введении новых интегральных операторов рождения/уничтожения фотонов в пространственных модах Шмидта и нахождении их эволюции в представлении Гайзенберга. Развитый теоретический подход позволяет описывать результаты различных экспериментов с ярким неклассическим светом, предсказывать и обнаруживать новые эффекты, возникающие в таком свете. В частности, исследована зависимость корреляционных характеристик сжатого вакуума от коэффициента параметрического усиления, продемонстрирована возможность создания пространственно одномодового источника излучения, а также генерация высокоинтенсивного излучения в скорелированных “пучках-близнецах” за счет эффекта пространственного сноса.

Кроме того, в данной работе рассмотрено взаимодействие модельного ридберговского атома с неклассическим полем, находящимся в состоянии сжатого вакуума и в фоковском состоянии. Обнаружены эффекты стабилизации атома относительно процесса ионизации в квантовом поле, а также высокие значения перепутанности между атомной и полевой подсистемами; показана возможность создания перепутанных и стабильных атомно-полевых состояний с требуемым значением перепутанности.

## Основные результаты и выводы

1. Впервые разработана последовательная аналитическая теория для описания пространственных свойств и корреляций в ярких «сжатых» состояниях света, генерируемых в процессе параметрического рассеяния света или четырехволнового смешения с интенсивной накачкой.

2. На основе разработанной теории впервые продемонстрировано изменение корреляционных свойств «сжатого вакуума» с ростом коэффициента параметрического усиления и получено объяснение наблюдаемых эффектов в терминах новых введенных независимых пространственных мод.

3. На основе разработанного теоретического подхода впервые показана возможность создания пространственно одномодового источника неклассического «сжатого» света в схеме нелинейного усиления с двумя кристаллами.

4. Впервые продемонстрировано гигантское усиление нелинейного сигнала, наблюдающееся на определенной частоте в направлении «сноса» и возникающее за счет эффектов анизотропии.

5. Впервые исследована динамика ионизации модельного ридберговского атома при его взаимодействии с неклассическим светом в состоянии «сжатого вакуума» и обнаружен эффект стабилизации, а также высокая степень перепутанности между атомной и полевой подсистемами.

6. При взаимодействии ридберговского атома с одним полевым фотоном обнаружена возможность управления стабилизацией системы и создание абсолютно стабильного состояния с высокой степенью перепутанности.

7. Предложены экспериментальные методы создания максимальной перепутанности в системе «атом + квантовое поле», а также способы восстановления полной информации о смешанном атомном состоянии посредством приложения последующего классического импульса.

## Литература

1. Шарапова П.Р., Тихонова О.В. Динамика ионизации и перепутывания в системе "атом + квантовое электромагнитное поле // Квантовая электроника – 2012 – Выпуск 42, №3, с. 199-207.
2. Sharapova P.R., Tikhonova O.V. Coherent control of interaction and entanglement of a Rydberg atom with few photons // *Las. Phys. Lett.* – 2013 – Volume 10, №7, p. 075204.
3. Sharapova P.R., Tikhonova O.V. Interaction of a classical laser field with a model Rydberg atom in a mixed state prepared by entanglement with few-photon quantum light // *Journal of Physics: Conference Series* – 2014 – Volume 497, p. 012017.
4. Pérez A.M., Iskhakov T.Sh., Sharapova P., Lemieux, S., Tikhonova O.V., Chekhova M.V., Leuchs G. Bright squeezed-vacuum source with 1.1 spatial mode // *Optics Letters* – 2014 – Volume 39, №8, pp. 2403-2406.
5. Sharapova P., Pérez A.M., Tikhonova O.V., Chekhova M.V. Schmidt modes in the angular spectrum of bright squeezed vacuum // *Phys. Rev. A* – 2015 – Volume 91, №4, p. 043816.
6. Dyakonov I.V., Sharapova P.R., Iskhakov T.Sh., Leuchs G. Direct Schmidt number measurement of high-gain parametric down conversion // *Las. Phys. Lett.* – 2015 – Volume 12, №6, p. 065202.
7. Pérez A.M., Spasibko K.Yu., Sharapova P.R., Tikhonova O.V., Chekhova M.V., Leuchs G. Giant Narrowband Twin-Beam Generation along the Pump Energy Propagation // *Nature Communications* – 2015 – Volume 6, p. 7707.
8. Шарапова П.Р. Динамика модельной атомной системы в сильном неклассическом электромагнитном поле // *Материалы докладов Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов 2010»*, Физика, секция «Оптика», доклад №22, Москва, Россия, 2010.

9. Sharapova P.R., Tikhonova O.V. Dynamics and ionization suppression of a model atomic system in quantized electromagnetic field // Abstracts of the International Conference on Coherent and Nonlinear Optics, ICONO 2010, 23-27 August, 2010, Kazan, Russia, report ITUP1.

10. Sharapova P.R., Tikhonova O.V. Interaction of an atom with a strong non-classical field // Book of abstracts XX International Laser Physics Workshop, LPHYS'11, 11-15 July, 2011, Sarajevo, Bosnia and Herzegovina, Seminar 2, report 2.70.

11. Sharapova P.R., Tikhonova O.V. Stabilization and entanglement of a model Rydberg atom in non-classical electromagnetic field // Book of abstracts XXI International Laser Physics Workshop, LPHYS'12, 23-27 July, 2012, Calgary, Canada, Seminar 2, talk 2.15.4.

12. Sharapova P.R. Entangled states of quantum composite systems // Abstracts of the International Conference of Physics Students, ICPS 2012, 04-09 August, 2012, Utrecht, Netherlands, p.26.

13. Sharapova P.R., Tikhonova O.V. Stabilization and entanglement of a model Rydberg atom in non-classical electromagnetic field // Abstracts of the International Workshop on Atomic Physics, 26-30 November, 2012, Dresden, Germany, p.39.

14. Sharapova P.R., Tikhonova O.V. Interference stabilization and entanglement of a model Rydberg atom in a quantum electromagnetic field // Abstracts of the International Conference on Coherent and Nonlinear Optics, ICONO 2013, 18-22 June, 2013, Moscow, Russia, talk IFH2.

15. Sharapova P.R., Tikhonova O.V. Behaviour of a model Rydberg atom in classical and quantum electromagnetic fields alternating each other // Book of abstracts XXII International Laser Physics Workshop, LPHYS'13, 15-19 July, 2013, Prague, Czech Republic, Seminar 2, talk 2.13.4.

16. Sharapova P.R., Tikhonova O.V., Pérez A.M., Chekhova M.V., Leuchs G. Theoretical description of spatial correlation in bright squeezed vacuum using Bloch-Messiah reduction // Advances in Foundations of Quantum Mechanics

and Quantum Information with atoms and photons, Quantum 2014, 25-30 May, 2014, Torino, Italy, report P72.

17. Sharapova P.R., Tikhonova O.V., Pérez A.M., Chekhova M.V., Leuchs G. Theoretical description of spatial correlations arising in bright squeezed vacuum by means of Bloch-Messiah reduction and Schmidt modes formalism // Book of abstracts XXIII International Laser Physics Workshop, LPHYS'14, 14-18 July, 2014, Sofia, Bulgaria, Seminar 7, talk 7.2.1.

18. Sharapova P.R., Tikhonova O.V., Pérez A.M., Chekhova M.V., Leuchs G. Theoretical description of spatial multiphoton correlations in bright squeezed vacuum states of light // SPIE Optics + Optoelectronics 2015, 13-16 April, 2015, Prague, Czech Republic, report 9505-33.

19. Sharapova P.R., Tikhonova O.V., Pérez A.M., Chekhova M.V., Leuchs G. The anisotropy effect and spatial walk-off in the bright squeezed vacuum states of light in terms of Schmidt modes // Abstracts of the 14<sup>th</sup> International Conference on Squeezed States and Uncertainty Relations, ICSSUR 2015, 29 June - 03 July, 2015, Gdansk, Poland, section C, p. 8.

20. Einstein A., Podolsky B., Rosen N. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete? // Phys. Rev. – 1935 – Volume 47, №10, pp. 777-780.

21. Glauber R.J. The Quantum Theory of Optical Coherence // Phys. Rev. – 1963 – Volume 130, №6, pp. 2529-2539.

22. Glauber R.J. Coherent and Incoherent States of the Radiation Field // Phys. Rev. – 1963 – Volume 131, №6, pp. 2766-2788.

23. Grobe R., Rzazewski K., Eberly J.H. Measure of electron-electron correlation in atomic physics // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. – 1994 – Volume 27, pp. L503-L508.

24. Fedorov M.V., Efremov M.A., Volkov P.A., Eberly J.H. Short-pulse or strong-field breakup processes: a route to study entangled wave packets // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. – 2006 – Volume 39, pp. S467-S483.

25. Von Neumann J. *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* - Springer, Berlin, 1932.
26. Wootters W.K. Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits // *Phys. Rev. Lett.* – 1998 – Volume 80, №10, pp. 2245-2248.
27. Bogdanov Yu.I., Moreva E.V., Maslennikov G.A., Galeev R.F., Straupe S.S., Kulik S.P. Polarization states of four-dimensional systems based on biphotons // *Phys. Rev. A* – 2006 – Volume 73, №6, p. 063810.
28. Кулик С.П., Молотков С.Н., Страупе С.С. О телепортации в системе тождественных частиц // *Письма в ЖЭТФ* – 2010 – Том 92, вып. 3, с. 212-215.
29. Клышко Д.Н. Когерентный распад фотонов в нелинейной среде // *Письма в ЖЭТФ* – 1967 – Volume 6, №1, pp. 490-492.
30. Giallorenzi T.G., Tang C.L. Quantum Theory of Spontaneous Parametric Scattering of Intense Light // *Phys. Rev.* – 1968 – Volume 166, №2, pp. 225-233.
31. Byer R.L., Harris S.E. Power and Bandwidth of Spontaneous Parametric Emission // *Phys. Rev.* – 1968 – Volume 168, №3, pp. 1064-1068.
32. Hong C.K., Mandel L. Theory of parametric frequency down conversion of light // *Phys. Rev. A* – 1985 – Volume 31, №4, pp. 2409-2418.
33. Bloembergen N. *Nonlinear Optics and Spectroscopy* // *Science* – 1982 – Volume 216, №4550, pp. 1057-1064.
34. Garth S.J., Pask C. Four-photon mixing and dispersion in single-mode fibers // *Opt. Lett.* – 1986 – Volume 11, №6, pp. 380-382.
35. Клышко Д.Н. *Фотоны и нелинейная оптика* – М.: Наука, 1980.
36. Law C.K., Eberly J.H. Analysis and Interpretation of High Transverse Entanglement in Optical Parametric Down Conversion // *Phys. Rev. Lett.* – 2004 – Volume 92, №12, p. 127903.
37. Fedorov M.V., Efremov M.A., Volkov P.A., Moreva E.V., Straupe S.S., Kulik S.P. Anisotropically and High Entanglement of Biphoton States

Generated in Spontaneous Parametric Down-Conversion // Phys. Rev. Lett. – 2007 – Volume 99, №6, p. 063901.

38. Law C.K., Walmsley I.A., Eberly J.H. Continuous Frequency Entanglement: Effective Finite Hilbert Space and Entropy Control // Phys. Rev. Lett. – 2000 – Volume 84, №23, pp. 5304-5307.

39. Chekhova M.V., Fedorov M.V. The Schmidt modes of biphoton qutrits: Poincaré-sphere representation // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. – 2013 – Volume 46, №9, p. 095502.

40. Kwiat P.G., Mattle K., Weinfurter H., Zeilinger A., Sergienko V., Snihi Y. New High – Intensity Source of Polarization-Entangled Photon Pairs // Phys. Rev. Lett – 1995 – Volume 75, №24, p. 4337.

41. Бурлаков А.В., Клышко Д.Н. Поляризационные бифотоны как оптические кварки // Письма в ЖЭТФ – 1999 – Том 69, вып. 11, с. 795-799.

42. K. Mattle, H. Weinfurter, P. G. Kwiat and A. Zeilinger Dense Coding in Experimental Quantum Communication // Phys. Rev. Lett. – 1996 – Volume 76, p. 4656.

43. H. Bechmann-Pasquinucci and W. Tittel, Phys. Quantum cryptography using larger alphabets // Rev. A – 2000 - Volume 61, p. 062308.

44. M. V. Chekhova, L. A. Krivitsky, S. P. Kulik, and G. A. Maslennikov Orthogonality of biphoton polarization states // Phys. Rev, A – 2004 – Volume 70, p. 053801.

45. Fedorov M.V., Volkov P.A., Mikhailova Yu.M., Straupe S.S., Kulik S.P. Entanglement of biphoton states: qutrits and ququarts // New Journal of Phys. – 2011 – Volume 13, p. 083004.

46. Fedorov M.V., Efremov M.A., Volkov P.A., Moreva E.V., Straupe S.S., Kulik S.P. Spontaneous parametric down-conversion: Anisotropical and anomalously strong narrowing of biphoton momentum correlation distributions // Phys. Rev. A – 2008 – Volume 77, №3, p. 032336.

47. Fedorov M.V., Mikhailova Yu.M., Volkov P.A. Gaussian modelling and Schmidt modes of SPDC biphoton states // *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys* – 2009 – Volume 42, p. 175503.
48. Travis S. Humble, Ryan S. Bennink and Warren P. Grice Simultaneous teleportation of multiple single-photon degrees of freedom // *Journal of Modern Optics* – 2011 – Volume 58, pp. 288-298.
49. Slusher R. E., Hollberg L. W., Yurke B., Mertz J. C., and Valley J. F. Observation of Squeezed States Generated by Four-Wave Mixing in an Optical Cavity // *Phys.Rev.Lett.* – 1985 – Volume 55, №, pp. 2409-2412.
50. Shangqing L., Yansong C. Generation of squeezed states by holography // *J. Opt. Soc. Am. B* - 1995 - Volume 12, p. 829.
51. Kasivishwanathan S. Highly Amplitude-Squeezed States of the Radiation Field // *Phys.Rev.Lett.* – 1995 - Volume 75, p. 2116.
52. T.Iskhakov, M.V.Chekhova and G.Leuchs Generation and Direct Detection of Broadband Mesoscopic Polarization-Squeezed Vacuum // *Phys. Rev. Lett.* – 2009 - Volume 102, p. 183602.
53. T. Sh. Iskhakov, I. N. Agafonov, M.V. Chekhova, and G. Leuchs Polarization-Entangled Light Pulses of 105 Photons // *Phys. Rev. Lett.* - -2012 – Volume 109, p. 150502.
54. I. N. Agafonov, M. V. Chekhova, and G. Leuchs Two-color bright squeezed vacuum // *Phys. Rev. A* – 2010 - Volume 82, p. 011801.
55. G. Brida, M. Genovese, and I. Ruo Berchera Experimental realization of sub-shot-noise quantum imaging // *Nat. Photon.* – 2010 – Volume 4, p. 227.
56. E. D. Lopaeva, I. Ruo Berchera, I. P. Degiovanni, S. Olivares, G. Brida, and M. Genovese Experimental Realization of Quantum Illumination // *Phys. Rev. Lett.* – 2013 - Volume 110, p. 153603.
57. G. Brida, I. P. Degiovanni, M. Genovese, M. L. Rastello, and I. Ruo Berchera Detection of multimode spatial correlation in PDC and application to the absolute calibration of a CCD camera // *Opt. Express* – 2010 - Volume 18, pp. 20572-20584.



58. F. Hudelist, J. Kong, C. Liu, J. Jing, Z. Y. Ou, and W. Zhang Quantum metrology with parametric amplifier-based photon correlation interferometers // Nat. Commun. – 2014 - Volume 5, p. 3049.
59. F. Khalili, S. Danilishin, H. Miao, H. Muller-Ebhardt, H. Yang, and Y. Chen Preparing a Mechanical Oscillator in Non-Gaussian Quantum States // Phys. Rev. Lett. – 2010 - Volume 105, p. 070403.
60. Jedrkiewicz O., Blanchet J.L., Gatti A., Brambilla E., Di Trapani P. High visibility pump reconstruction via ultra broadband sum frequency mixing of intense phase-conjugated twin beams // Opt. Express – 2011 - Volume 19, p. 12903.
61. E. Brambilla, A. Gatti, M. Bache, and L. A. Lugiato Simultaneous near-field and far-field spatial quantum correlations in the high-gain regime of parametric down-conversion // Phys. Rev. A – 2004 - Volume 69, p. 023802.
62. E. Brambilla, L. Caspani, O. Jedrkiewicz, L. A. Lugiato, and A. Gatti High-sensitivity imaging with multi-mode twin beams // Phys. Rev. A – 2008 - Volume 77, p. 053807.
63. E. Brambilla, L. Caspani, L. A. Lugiato, and A. Gatti Spatiotemporal structure of biphoton entanglement in type-II parametric down-conversion // Phys. Rev. A – 2010 - Volume 82, p. 013835.
64. W. Wasilewski, A. I. Lvovsky, K. Banaszek, and Czesław Radzewicz Pulsed squeezed light: Simultaneous squeezing of multiple modes // Phys. Rev. A – 2006 - Volume 73, p. 063819.
65. Dayan B. Theory of two-photon interactions with broadband down-converted light and entangled photons // Phys. Rev. A – 2007 - Volume 76, p. 043813.
66. Christ A., Brecht B., Mauerer W. and Silberhorn C., Quantum Theory of Spontaneous Parametric Scattering of Intense Light // New J. Phys. – 2013 - Volume 15, p. 053038.

67. Eckstein A., Brecht B., and Silberhorn C., A quantum pulse gate based on spectrally engineered sum frequency generation // *Opt. Express* – 2011 – Volume 19, p.13770.
68. Fedorov M.V., Efremov M.A., Kazakov A.E., Chan K.W., Law C.K., and Eberly J.H., Packet narrowing and quantum entanglement in photoionization and photodissociation // *Phys. Rev. A* – 2004 - Volume 69, p. 052117.
69. Braunstein S.L., Squeezing as an irreducible resource // *Phys. Rev. A* – 2005 - Volume 71, p. 055801.
70. Килин С.Я. Квантовая информация // *УФН* – 1999 - Том 169, №5, с. 507-527.
71. C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, W. M. Itano, and D. J. Wineland Demonstration of a Fundamental Quantum Logic Gate // *Phys. Rev. Lett.* – 1995 – Volume 75, №25, pp. 4714-4717.
72. R. J. Sewell, M. Napolitano, N. Behbood, G. Colangelo and M. W. Mitchell Certified quantum non-demolition measurement of a macroscopic material system // *Nature Phot.* – 2013 – Volume 7, pp. 712-720.
73. M.Sondermann, R.Maiwald, H.Konermann N. Lindlein, U. Peschel, and G. Leuchs Design of a mode converter for efficient light-atom coupling in free space // *Appl. Phys. B* - 2007 – Volume 89, p. 489.
74. M.K.Tey, Z.Chen, S.Aljunid et. al. Strong interaction between light and a single trapped atom without the need for a cavity // *Nature Phys.* – 2008 - Volume 4, pp. 924-927.
75. Ekimov A., Efros A. L., Onushchenko A. Quantum size effect in semiconductor microcrystals // *Solid State Communications* – 1985 - Volume 56, № 11, pp. 921–924.
76. Rossetti R., Ellison J., Gibson J., and Brus L. Size effects in the excited electronic states of small colloidal CdS crystallites // *The Journal of chemical physics* – 1984 - Volume 80, №9, pp. 4464–4469.

77. Lounis B., Bechtel H., Gerion D., Alivisatos P., and Moerner W. Photon antibunching in single CdSe/ZnS quantum dot fluorescence // *Chemical Physics Letters* – 2000 - Volume 329, №5, pp. 399–404.
78. F. Pisanello, L. Martiradonna, G. Leménager, P. Spinicelli, A. Fiore, L. Manna, J.- P. Hermier, R. Cingolani, E. Giacobino, M. De Vittorio, et al., “Room temperature-dipolelike single photon source with a colloidal dot-in-rod,” *Applied Physics Letters*, vol. 96, no. 3, p. 033101, 2010.
79. P. Michler, A. Kiraz, C. Becher et al. A Quantum Dot Single-Photon Turnstile Device // *Science* – 2000 – Volume 290, p. 2282.
80. C. Santori, M. Petroni, G. Solomon, et al. Triggered Single Photons from a Quantum Dot // *Phys. Rev. Lett.* – 2001 – Volume 86, p. 1502.
81. J. McKeever, A. Boca, A. D. Boozer, R. Miller, J. R. Buck, A. Kuzmich, H. J. Kimble Deterministic Generation of Single Photons from One Atom Trapped in a Cavity // *Science* – 2004 - Volume 303, p. 1992.
82. B. Darquié, M. P. A. Jones, J. Dingjan, J. Beugnon, S. Bergamini, Y. Sortais, G. Messin, A. Browaeys, P. Grangier Controlled Single-Photon Emission from a Single Trapped Two-Level Atom // *Science* – 2005 - Volume 309, p. 454.
83. P. Maunz, D. L. Moehring, S. Olmschenk, K. C. Younge, D. N. Matsukevich and C. Monroe Quantum interference of photon pairs from two remote trapped atomic ions // *Nature Phys.* – 2007 - Volume 3, p. 538.
84. Blinov B.B., Moehring D.L., Duan L.M., Monroe C. Observation of entanglement between a single trapped atom and a single photon // *Nature* – 2004 – Volume 428, №6979, pp. 153-157.
85. Volz J., Weber M., Schlenk D., Rosenfeld W., Vrana J., Saucke K., Kurtsiefer C., Weinfurter H. Observation of Entanglement of a Single Photon with a Trapped Atom // *Phys. Rev. Lett.* – 2006 – Volume 96, №3, p. 030404.
86. I. Cirac, P. Zoller, H. J. Kimble and H. Mabuchi Quantum State Transfer and Entanglement Distribution among Distant Nodes in a Quantum Network // *Phys. Rev. Lett.* – 1997 – Volume 78, №16, pp. 3221-3224.

87. Баргатин И. В., Гришанин Б. А., Задков В. Н. Запутанные квантовые состояния атомных систем // УФН -2001 – том 171, №6, с. 625-647.
88. Sayrin C., Dotsenko I., Gleyzes S., Brune M., Raimond J.M., Haroche S. Optimal time-resolved photon number distribution reconstruction of a cavity field by maximum likelihood // New J Phys. – 2012 – Vol. 14, p. 115007.
89. P. O. Schmidt, T. Rosenband, C. Langer, W. M. Itano, J. C. Bergquist, D. J. Wineland Spectroscopy Using Quantum Logic // Science – 2005 – Volume 309, pp. 749-752.
90. А.В.Масалов «Сжатый» свет в процессах многофотонного взаимодействия // Оптика и спектроскопия – 1991 - Том 70, вып.3, с. 648-652.
91. M.V.Fedorov Atomic and Free Electrons in a Strong Light Field - World Scientific, 1997, Singapore.
92. N.B.Delone, V.P.Krainov Multiphoton Processes in Atoms - Berlin: Springer, 1993.
93. M.Gavrila Atomic stabilization in superintense laser fields // J.Phys.B. – 2002 - Volume 35, R147.
94. А.М.Попов, О.В.Тихонова, Е.А.Волкова Strong-field atomic stabilization: numerical simulation and analytical modeling // J.Phys.B. – 2003 - Volume 36, R125-R165.
95. M.V.Fedorov, A.M.Movsesian Field-induced effects of narrowing of photoelectron spectra and stabilisation of Rydberg atoms // J.Phys.B – 1988 - Volume 21, L155.
96. Полуэктов Н.П., Федоров М.В. Фазовый контроль степени ионизации ридберговских атомов сильным лазерным полем //ЖЭТФ -2000-Том 117, вып.5, с.913-925.
97. M.V.Fedorov, N.P.Poluektov  $\Lambda$ -and V-Type Transitions and Their Role in the Interference Stabilization of Rydberg Atoms // Laser.Phys. – 1997 - Volume 7, p. 299.

98. M.V.Fedorov, N.P.Poluektov Controllable Photoionization of Rydberg Atoms in the V-Type Interference Stabilization Regime // Laser.Phys. – 2001 - Volume 11, p. 255.
99. В.П.Быков Основные особенности сжатого света // УФН - 1991 - Том 161, №10, с.145.
100. А.М.Попов, О.В.Тихонова Ионизация атомов в интенсивном неклассическом электромагнитном поле // ЖЭТФ – 2002 – Том 122, с. 978-985.
101. W.Leonski Squeezed-state effect on bound-continuum transitions // J.Opt.Soc.Am.B – 1993 – Volume 10, p. 244.
102. F. M. Miatto, T. Brougham, and A. M. Yao Cartesian and polar Schmidt bases for down-converted photons: How high dimensional entanglement protects the shared information from non-ideal measurements // Eur. Phys. J. D – 2012 – Volume 66, p. 183.
103. A. Perez, A. Cavanna, F. Just, M. V. Chekhova, and G. Leuchs Compensation of anisotropy effects in a nonlinear crystal for squeezed vacuum generation // Laser Phys. Lett. – 2013 – Volume 10, p. 125201.
104. A. Cavanna, A. M. Perez, F. Just, M. V. Chekhova, and G. Leuchs Compensation of anisotropy effects in the generation of two-photon light // Optics Express – 2014 - Volume 22, p. 9984.
105. A. Allevi and M. Bondani Statistics of twin-beam states by photon-number resolving detectors up to pump depletion // J. Opt. Soc. Am. B – 2014 – Volume 31, B14.
106. G.Brida, A.Meda, M.Genovese, E. Predazzi, I.Ruo-Berchera Tailoring PDC speckle structure // Journal of Modern Optics – 2009 – Volume 56, p. 201.
107. A. Allevi, O. Jedrkiewicz, E. Brambilla, A. Gatti, J. Peřina, Jr., O. Haderka, and M. Bondani Coherence properties of high-gain twin beams // Phys. Rev. A - 2014 – Volume 90, p. 063812.

Автор выражает искреннюю признательность и благодарность научному руководителю - профессору Тихоновой Ольге Владимировне за помощь на всех этапах выполнения диссертационной работы, душевную теплоту, необычайную заботу и моральную поддержку.

Автор выражает глубокую благодарность профессору Чеховой Марии Владимировне за плодотворные научные обсуждения и непосредственную возможность сотрудничества с экспериментальной группой в течение приглашенных визитов в г. Эрланген, а также экспериментаторам в лице Ангелы Перез и Тимура Искхакова за предоставленные экспериментальные данные и продуктивное сотрудничество.

Также автор выражает благодарность коллективу кафедры атомной физики, физики плазмы и микроэлектроники, особенно профессору Попову Александру Михайловичу за приобретенные навыки и знания в процессе обучения на кафедре.

И наконец, автор выражает глубокую признательность и благодарность родителям, брату, близким людям и друзьям за понимание, теплоту, неоценимую помощь и поддержку в течение всего времени выполнения и написания данной работы.