

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА

На правах рукописи

Полежаев Роман Геннадьевич

**ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССОВ РАССЕЯНИЯ И РАСПАДА
СОСТАВНЫХ КВАРКОВЫХ СИСТЕМ МЕТОДАМИ
РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ С
ФИКСИРОВАННЫМ ЧИСЛОМ ЧАСТИЦ**

Специальность 01.04.16 - физика атомного ядра и элементарных частиц

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:
доктор физико-математических наук,
профессор А.Ф. Крутов;
доктор физико-математических наук,
профессор В.Е. Троицкий

Самара-2016

Оглавление

Введение	4
1 Релятивистские методы описания составных систем	17
1.1 Методы квантовой теории поля и составные кварковые модели	17
1.2 Квантомеханические представления группы Пуанкаре . . .	21
1.3 Формы РКМ	26
1.4 Релятивистские векторы состояния в РКМ	34
1.5 Построение матричного элемента электрослабого тока, диагонального по полному угловому моменту	39
2 Константа лептонного распада и среднеквадратичный радиус ρ-мезона	45
2.1 Параметризация матричного элемента электрослабого тока, недиагонального по полному угловому моменту . . .	45
2.2 Константа лептонного распада ρ -мезона	49
2.3 Среднеквадратичный радиус ρ -мезона, определяемый из константы лептонного распада	54
3 Описание радиационного распада $\rho \rightarrow \pi\gamma^*$	63
3.1 Электрослабые свойства π - и ρ -мезонов и параметры СКМ	63
3.2 Параметризация недиагонального по полному угловому моменту электромагнитного тока свободной двухчастичной системы	70
3.3 Вывод формулы для переходного формфактора $F_{\pi\rho}(Q^2)$.	72
3.4 Численный расчет формфактора $F_{\pi\rho}(Q^2)$	77
4 Электромагнитная структура двухчастичных систем в рамках основных форм РКМ	80

4.1	Построение матричного элемента электрослабого тока свободной бесспиновой двухчастичной системы в основных формах РКМ	80
4.2	Построение матричного элемента электрослабого тока системы двух бесспиновых частиц со взаимодействием . .	84
4.3	Электромагнитный формфактор пиона в основных формах РКМ	91
4.4	Численный расчет электромагнитного формфактора и среднеквадратичного радиуса пиона	96
	Заключение	101
	Приложение 1	120
	Приложение 2	122

Введение

Актуальность

Описание электрослабых свойств составных кварковых систем является актуальной задачей физики элементарных частиц уже на протяжении многих лет. Изучение этих систем в различных подходах позволяет получить информацию о пространственно-временной картине взаимодействия кварков на различных масштабах энергий, понять механизмы формирования составных систем на основе кварк-глюонной теории сильных взаимодействий, выявить эффекты вне Стандартной модели. Интерес к этим исследованиям сильно возрос в последние годы. Это связано в первую очередь с серией новых экспериментальных результатов, полученных на различных ускорителях [1]-[22].

В последнее время был проведен ряд экспериментов по изучению радиационных распадов векторных мезонов. Так, коллаборациями NA 60 [1, 2, 3], KLOE-2 [4] были измерены переходные формфакторы в реакциях $\omega \rightarrow \pi\gamma^*$, $\phi \rightarrow \eta\gamma^*$. В коллаборации HERMES [5] рассматривались жесткие эксклюзивные процессы электророждения ω - мезонов при энергиях 27.6 GeV , полученных при рассеянии позитронных и электронных пучков на поперечно поляризованной водородной мишени. Изучение данных процессов позволяет не только измерить переходной формфактор $F_{\pi\omega}(Q^2)$, но и рассчитать по нему такие электрослабые характеристики процесса как магнитный момент перехода, среднеквадратичный радиус перехода, ширина распада и т.д.

Изучение коллаборацией A2 зависимости парциальной ширины от квадрата двухфотонной инвариантной массы в распаде $\eta \rightarrow \pi^0\gamma\gamma$ позволило получить более точное значение ширины данного распада [6].

В программах, осуществляемых Джефферсоновской лабораторией (JLab), проводились эксперименты по рассеянию поляризованных электронов на π - мезонах и протонах. В электрон-протонном рассеянии изучались свойства нуклонного резонанса в процессе $ep \rightarrow e'p'\pi^+\pi^-$.

В данных экспериментах удалось обеспечить надежное разделение резонансной и нерезонансной частей сечений, изучить эксклюзивные процессы электророждения протонных состояний, произвести расчет дифференциальных сечений и структурных функций в широком диапазоне переданных импульсов [7, 8].

В JLab были проведены также новые эксперименты по измерению электромагнитных формфакторов пиона при больших переданных импульсах [9, 10]. Основная цель этих экспериментов состояла в наблюдении эффектов пертурбативной КХД и изучении переходной области от непертурбативной к пертурбативной кварк-кварковой динамике.

Измерения электромагнитных формфакторов протона в JLab [11, 12] выявили противоречие между результатами поляризационных и неполяризационных экспериментов по рассеянию электронов на протонах - т.н. "нерезенблютовское" поведение электрического протонного формфактора.

Следует отметить в этом ряду проведенные коллаборацией BABAR эксперименты [13, 14] по измерению переходных формфакторов мезонов, где в области квадрата переданного импульса $4 GeV^2 < Q^2 < 40 GeV^2$ наблюдалось отклонение от предсказаний пертурбативной КХД [14]. Это отклонение проявляет себя в росте переходного формфактора $F_{\gamma\gamma^* \rightarrow \pi^0}(Q^2)$ при увеличении переданного импульса, что противоречит результатам квантовой хромодинамики.

Получены новые экспериментальные данные о мезонах, содержащих один тяжелый кварк (B - и D - мезоны), в программах, осуществляемых коллаборациями BABAR [15], LHCb [16]-[20] и другими, где проводились измерения масс, времен жизни, электромагнитных радиусов, относительных ширин полулептонных распадов.

В последнее время появилась новая экспериментальная информация по электрослабым свойствам короткоживущих мезонов, таких как ρ -мезон. Так, в процессе $\tau \rightarrow \rho\nu_\tau$ была измерена константа лептонного распада ρ -мезона [21], а из радиационного перехода $\rho \rightarrow \pi\gamma^*$ получен соответствующий магнитный момент [22].

Прогресс в экспериментальном изучении перечисленных адронных систем дал новый толчок теоретическому описанию связанных состояний кварков.

Последовательной теорией сильных взаимодействий справедливо

считается квантовая хромодинамика, оперирующая бесконечным числом степеней свободы, переносимых кварками и глюонами [23, 24]. Однако, надежные предсказания КХД, как известно, дает для процессов, характеризующихся большими энергиями и переданными импульсами. При этом, например, описание связанных состояний не может быть осуществлено в рамках пертурбативной КХД. В области промежуточных переданных импульсов и, соответственно, больших расстояний бегущая константа связи α_s велика и теория возмущений неприменима, поэтому для описания такого рода процессов используют, как правило, непертурбативные подходы в рамках различных составных моделей [25]-[51].

Одним из таких подходов является восходящая к работам П. Дирака релятивистская квантовая механика с фиксированным числом частиц (РКМ), которая и используется в настоящей диссертационной работе (см., например, [52]). Суть РКМ заключается в следующем. Как известно, релятивистская инвариантность теории означает существование на гильбертовом пространстве состояний системы унитарного представления неоднородной группы $SL(2, C)$, которая является универсальной накрывающей группы Пуанкаре. Условием релятивистской инвариантности является выполнение коммутационных соотношений алгебры Пуанкаре для генераторов пространственно-временных трансляций \hat{P}^μ и вращений $\hat{M}^{\mu\nu}$. Построение представления $SL(2, C)$ в гильбертовом пространстве сводится к нахождению этих генераторов в терминах динамических переменных системы. При включении взаимодействия в составной системе для сохранения коммутационных соотношений алгебры Пуанкаре оператор взаимодействия приходится включать не только в генератор временных трансляций, как это происходит в нерелятивистском случае, но и в другие генераторы. Генераторы в алгебре Пуанкаре при этом разбиваются на гамильтонианы, т.е. генераторы, содержащие взаимодействие, и на генераторы, не содержащие взаимодействия, которые образуют т.н. кинематическую подгруппу.

В зависимости от выбора кинематической подгруппы Дирак выделил три основных способа описания эволюции релятивистских систем - различные формы динамики: мгновенная форма, точечная форма и динамика на световом фронте [53].

Важным нерешенным вопросом теории остается эквивалентность этих основных форм динамики (см., например, [54, 55, 56]). Существующие доказательства эквивалентности выполнены для различных частных процессов и приближений. Например, проведено доказательство равноценности мгновенной формы и динамики на световом фронте в системе отсчета с бесконечным импульсом [57]. Была показана также S -матричная эквивалентность основных форм динамики [58, 59]. Однако, до сих пор не решен вопрос об равнозначности форм динамики при описании связанных состояний. Таким образом, данная проблема по-прежнему остается актуальной. В диссертационной работе показана эквивалентность основных форм РКМ при расчетах электромагнитных формфакторов составных кварковых систем. В работе получены одинаковые аналитические выражения для электромагнитных формфакторов в рамках мгновенной и точечной форм динамики, а также динамики на световом фронте.

Одной из важных до конца нерешенных теоретических проблем описания электрослабых свойств составных кварковых систем остается проблема построения операторов токов перехода с учетом условий лоренц-ковариантности и сохранения (см., например, [60, 61]). Данная проблема, вообще говоря, возникает не только в РКМ, но и во всех релятивистских подходах.

В диссертационной работе для построения оператора тока в рамках РКМ используется процедура параметризации матричных элементов локальных операторов [62]. Данный метод в релятивистской теории позволяет выразить матричный элемент любой тензорной размерности через конечное число релятивистски-инвариантных функций - формфакторов. Матричный элемент оператора представляется при этом суммой слагаемых, каждое из которых является произведением ковариантного и инвариантного членов. Ковариантная часть такого представления матричного элемента описывает его трансформационные (геометрические) свойства, а вся динамическая информация о переходе, описываемом данным оператором, содержится в инвариантной части - приведенных матричных элементах или формфакторах. Для построения матричного элемента тока в диссертации используется т.н. модифицированное импульсное приближение (МИП) [63], которое отличается от общепринятого импульсного приближения (ИП) тем, что формулируется в терминах формфакторов, а не исходных матричных

элементов. Отметим, что МИП не приводит к нарушению условий ковариантности и сохранения в отличие от общепринятого импульсного приближения. В диссертации развита процедура параметризации для случая матричного элемента тока, недиагонального по полному угловому моменту. В развитом формализме в работе произведены вычисления константы лептонного распада ρ -мезона, расчет переходного формфактора и магнитного момента для процесса радиационного распада $\rho \rightarrow \pi\gamma^*$, а также среднеквадратичного радиуса ρ -мезона. Результаты расчетов хорошо согласуются с экспериментом.

Целью диссертационной работы является описание электрослабых свойств составных кварковых систем в рамках релятивистской квантовой механики с использованием новой процедуры построения матричных элементов электрослабых токов.

Основные задачи исследования можно сформулировать следующим образом:

1. В рамках мгновенной формы РКМ разработать методику параметризации матричных элементов электрослабых токов, недиагональных по полному угловому моменту.
2. Используя разработанную методику, вычислить константу лептонного распада ρ -мезона.
3. Фиксируя параметры модели из описания электрослабых свойств π -мезона, рассчитать среднеквадратичный радиус ρ -мезона.
4. В рамках мгновенной формы РКМ показать возможность согласованного описания электрослабых характеристик π - и ρ -мезонов.
5. Вычислить переходной формфактор и соответствующий магнитный момент в радиационном распаде $\rho \rightarrow \pi\gamma^*$.
6. С использованием развитого в работе формализма параметризации показать эквивалентность трех основных форм РКМ при описании электромагнитных формфакторов связанных состояний кварков на примере формфактора пиона.

Методы исследования

Описание процессов с участием скалярных и векторных мезонов осуществляется в рамках РКМ. Для построения матричных элементов токов с учетом условий лоренц-ковариантности и сохранения используется процедура параметризации матричных элементов локальных операторов.

Вычисление свободных двухчастичных формфакторов, описывающих

электрослабые свойства системы невзаимодействующих частиц со спином, производится строгими методами релятивистской кинематики.

Научная новизна и практическая ценность работы

В диссертации в рамках РКМ разработан новый эффективный метод описания процессов рассеяния и распада мезонов. Центральным пунктом развитого подхода является процедура построения электрослабых токов. В диссертации сформулирован метод построения матричных элементов электрослабых токов, недиагональных по полному угловому моменту - метод параметризации матричных элементов токов перехода. Сформулированное в рамках развитого метода модифицированное импульсное приближение не приводит к нарушению условий лоренц-ковариантности и сохранения тока в отличие от общепринятого импульсного приближения.

В развитом формализме вычислена константа лептонного распада ρ -мезона. Показана возможность согласованного (при одинаковых параметрах модели) описания электрослабых характеристик π - и ρ -мезонов, что является отличительным свойством развиваемого подхода. В частности, без свободных параметров был рассчитан среднеквадратичный радиус ρ -мезона. Результаты расчета удовлетворяют гипотезе Ву и Янга о равенстве зарядового и сильного радиусов, подтвержденной экспериментально для ряда адронов.

В рамках мгновенной формы РКМ проведен расчет переходного формфактора для радиационного перехода $\rho \rightarrow \pi\gamma^*$. Вычислен магнитный момент перехода $\mu_{\pi\rho} = F_{\pi\rho}(0)$. Результаты расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Для трех основных форм РКМ впервые показана эквивалентность описания электромагнитной структуры пиона, как связанного состояния u - и \bar{d} - кварков. Аналитические выражения для электромагнитного формфактора пиона в развитом в диссертации подходе полностью совпадают в рамках трех основных форм РКМ.

Полученные в диссертации результаты расчетов электромагнитных формфакторов дают информацию о переходном режиме от непертурбативной к пертурбативной кварковой динамике. Проведенное в диссертационной работе согласованное описание электрослабых характеристик π - и ρ - мезонов позволяет зафиксировать параметры составной кварковой модели, а также предсказывать и интерпретировать результаты новых экспериментов.

Достоверность и обоснованность научных положений и выводов диссертации подтверждается использованием общепринятого подхода - релятивистской квантовой механики, строгого метода построения матричных элементов локальных операторов, а также хорошим согласием полученных результатов с современными экспериментальными данными и совпадением в частных случаях с результатами вычислений в других подходах.

Основные положения и результаты, выносимые на защиту

1. В рамках мгновенной формы РКМ разработана процедура параметризации матричного элемента электрослабого тока, недиагонального по полному угловому моменту.

2. С использованием разработанной методики проведено описание константы лептонного распада ρ -мезона. Результаты вычислений согласуются с теоретическими вычислениями данной константы в других подходах.

3. Произведен расчет среднеквадратичного радиуса ρ -мезона при фиксированных параметрах модели. Результаты расчета удовлетворяют гипотезе о равенстве зарядовых и сильных радиусов, подтвержденной для ряда адронов.

4. Проведена оценка параметров составной кварковой модели из анализа электрослабых характеристик π - и ρ -мезонов. Получено хорошее описание электрослабых характеристик π - и ρ -мезонов при одинаковых параметрах конститuentных кварков.

5. В рамках развитой методики получены аналитические выражения и численные значения для переходного формфактора $F_{\pi\rho}(Q^2)$ и соответствующего магнитного момента перехода $\mu_{\pi\rho}$ в распаде $\rho \rightarrow \pi\gamma^*$.

6. Показана эквивалентность трех основных форм РКМ на примере описания электромагнитного формфактора пиона. Получены одинаковые аналитические выражения для электромагнитного формфактора пиона в рамках трех основных форм РКМ.

Апробация работы

Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих научных форумах: международной конференции "Физика высоких энергий и квантовая теория поля"(QFTNER) (Санкт-Петербург, 2013; Самара, 2015), конференции "Физика фундаментальных взаимодействий"(Москва МИФИ, 2012), международной конференции по математической физике и ее

приложениям (Самара, 2012, 2014), сессии-конференции ОЯФ РАН (Дубна, 2016), международной конференции "Кварки-2016" (Санкт-Петербург, 2016), а также на регулярных научных семинарах в Самарском национальном исследовательском университете имени академика С.П. Королева.

Публикации

По теме диссертационной работы опубликовано 15 работ, в том числе: в журналах из списка ВАК - 6 [64]-[69], в журналах, не входящих в список ВАК - 4 [70]-[73], в трудах конференций -5 [74]-[78].

Личный вклад автора является определяющим при получении результатов, составивших основу диссертации. В частности, автором сформулирована методика построения матричного элемента электрослабого тока перехода недиагонального по полному угловому моменту, показана эквивалентность трех основных форм РКМ на примере расчета пионного формфактора, проведены все аналитические и численные расчеты.

Объем и структура работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, библиографии из 187 наименований, 2 приложений, 4 таблиц. Она содержит 12 рисунков. Общий объем диссертации составляет 123 страницы.

Содержание работы

Первая глава носит обзорный характер. В ней рассматриваются различные релятивистские методы описания составных двухчастичных систем. Особое внимание уделяется описанию положений РКМ, которая используется в настоящей диссертационной работе.

Первый параграф посвящен краткому изложению методов релятивистского описания составных систем. В данном параграфе рассмотрены подходы, основанные на методах квантовой теории поля, а также некоторые феноменологические модели с фиксированным числом частиц. Выявлены характерные особенности данных подходов.

Во втором параграфе проведено описание алгебры группы Пуанкаре. Приведена классификация группы Пуанкаре относительно операций отражения пространства и времени. Рассматривается алгебра собственной ортохронной группы Пуанкаре, в том числе структура универсальной накрывающей группы специальных линейных 2×2

матриц - $SL(2, C)$.

В третьем параграфе рассматриваются основные формы РКМ: мгновенная форма, точечная форма, динамика на световом фронте. Подробно описываются особенности включения взаимодействия в генераторы группы Пуанкаре в зависимости от выбора формы РКМ. Кратко описываются результаты расчетов электрослабых свойств составных систем в основных формах РКМ.

Четвертый параграф посвящен описанию типов базисных векторов состояний в гильбертовом пространстве состояний двухчастичной системы. Подробно рассматривается структура канонического базиса одночастичной и двухчастичной систем в рамках мгновенной формы РКМ. Приведено описание моментного базиса двухчастичной системы с явно отделенным движением центра масс (СЦИ), который используется в последующих главах диссертации.

В пятом параграфе рассматривается методика построения матричного элемента электрослабого тока, диагонального по полному угловому моменту, в рамках мгновенной формы РКМ. Узловым моментом этого формализма является построение матричного элемента тока релятивистски ковариантным образом с помощью общего метода параметризации матричных элементов локальных операторов.

Вторая глава посвящена развитию метода построения матричных элементов токов, недиагональных по полному угловому моменту, в рамках мгновенной формы РКМ, а также вычислению с использованием этого метода электрослабых характеристик ρ -мезона.

В первом параграфе развивается процедура параметризации матричных элементов токов недиагональных по полному угловому моменту. Параметризация производится в брейтовской системе отсчета (БС), результат параметризации преобразуется затем к лабораторной системе (ЛС). Построение матричного элемента тока проводится отдельно для его нулевой и трехмерной компоненты. Описание нулевой компоненты тока проводится в терминах тензорного оператора нулевого ранга, а трехмерной компоненты - в терминах тензорного оператора первого ранга. Матричный элемент тока выражается через конечное число релятивистски-инвариантных функций - формфакторов.

В качестве иллюстрации развитой методики недиагональной параметризации матричного элемента тока в рамках мгновенной формы РКМ во втором параграфе получено аналитическое выражение для

константы лептонного распада ρ -мезона. Показано, что аналитическое выражение для константы f_ρ совпадает с выражениями, полученными в рамках точечной формы динамики и динамики на световом фронте [79, 80].

В третьем параграфе произведены расчеты зарядового радиуса ρ -мезона. Параметры конституентных кварков фиксируются из пионных расчетов, а параметры волновых функций - из экспериментального значения константы лептонного распада ρ -мезона: $f_\rho^{exp} = 152 \pm 8 \text{ MeV}$. Показано, что при данной фиксации параметров модели значение среднеквадратичного радиуса ρ -мезона удовлетворяет равенству:

$$\langle r_\rho^2 \rangle - \langle r_\pi^2 \rangle = 0.11 \pm 0.06 \text{ fm}^2 . \quad (1)$$

Равенство (1) получено, исходя из гипотезы Ву и Янга [81] относительно вида сечения упругого адрон-протонного рассеяния. Следствием этой гипотезы является равенство зарядового радиуса и т.н. среднеквадратичного радиуса сильного взаимодействия адрона, который выражается через наклон сечений адрон-протонного, протон-протонного и протон-антипротонного рассеяния [82, 83].

Третья глава посвящена описанию радиационного распада $\rho \rightarrow \pi\gamma^*$ средствами развитой во второй главе диссертации методики недиагональной параметризации матричного элемента электрослабого тока.

Первый параграф посвящен анализу зависимости электрослабых характеристик π - и ρ -мезона от параметров составной кварковой модели. Проведены численные расчеты электромагнитных формфакторов ρ -мезона для разных волновых функций и масс конституентных кварков. Показано, что зависимость формфакторов от массы конституентных кварков является более сильной, чем зависимость от выбора волновой функции. Графики расчетов электромагнитных формфакторов ρ -мезона в различных моделях кварк-антикваркового взаимодействия при фиксированной массе конституентного кварка собираются в группы. Экспериментальное измерение формфактора ρ -мезона в принципе может дать информацию о величине массы конституентных u - и d -кварков.

Второй параграф содержит построение электрослабого тока перехода между состояниями свободной двухчастичной системы с квантовыми числами π - и ρ -мезонов. Получены аналитические выражения для т.н. свободных формфакторов или приведенных матричных элементов тока

перехода с изменением полного углового момента в двухчастичной системе без взаимодействия.

В третьем параграфе проведена процедура недиагональной параметризации матричного элемента тока составной системы со взаимодействием. В рамках МИП получены аналитические выражения для формфакторов составной системы:

$$G_{01}^{01}(Q^2) = \int \int d\sqrt{s}d\sqrt{s'}g_{01}^{01}(s, Q^2, s')\varphi(s)\varphi_{S'}^{J'}(s'), \quad (2)$$

$$G_{01}^{111}(Q^2) = \int \int d\sqrt{s}d\sqrt{s'}g_{01}^{111}(s, Q^2, s')\varphi(s)\varphi_{S'}^{J'}(s'), \quad (3)$$

$g_{01}^{01}(s, Q^2, s')$, $g_{01}^{111}(s, Q^2, s')$ - свободные электромагнитные формфакторы двухчастичной системы; Q^2 - квадрат переданного импульса, s, s' - инвариантные массы свободной двухчастичной системы в начальном и конечном состоянии; $\varphi(s), \varphi_{S'}^{J'}(s')$ - волновые функции в смысле РКМ для пиона и ρ -мезона, соответственно.

Получена формула, описывающая связь общепринятого формфактора перехода, входящего в сечение процесса $\rho \rightarrow \pi\gamma^*$ с формфактором (3):

$$F_{\pi\rho}(Q^2) = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{G_{01}^{111}(Q^2)}{q \left(\sqrt{M_\pi^2 + q^2} + \sqrt{M_\rho^2 + q^2} \right)}, \quad (4)$$

где

$$q = \sqrt{\lambda(M_\pi^2, M_\rho^2, Q^2)/[8(M_\pi^2 + M_\rho^2) + 4Q^2]},$$

$\lambda(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab + ac + bc)$, M_π и M_ρ - массы π - и ρ -мезонов, соответственно.

В четвертом параграфе производится расчет переходного формфактора $F_{\pi\rho}(Q^2)$ и соответствующего магнитного момента перехода $\mu_{\pi\rho} = F_{\pi\rho}(0)$. Масса конституентного кварка фиксируется из пионных расчетов, параметр волновых функций - из требования описания среднеквадратичных радиусов π - и ρ - мезонов. Формфактор кварка был выбран в виде:

$$f_q(Q^2) = \frac{1}{1 + \langle r_q^2 \rangle Q^2/6}, \quad (5)$$

$\langle r_q^2 \rangle$ -среднеквадратичный радиус конституентного кварка.

Выбор формфактора (5) был продиктован необходимостью сравнения с результатами других работ. Результаты расчета магнитного момента перехода имеют хорошее согласие с экспериментом и качественно согласуются с результатами других теоретических подходов.

В четвертой главе показана эквивалентность расчетов электромагнитных формфакторов составных кварковых систем для основных форм РКМ.

В качестве первого шага в первом параграфе проведена параметризация матричного элемента тока простой модельной системы двух свободных бесспиновых частиц в S -состоянии относительного движения в мгновенной, точечной формах динамики и динамики на световом фронте. Анализ выражений показывает полную эквивалентность формул, полученных в разных динамиках.

С использованием МИП во втором параграфе получено аналитическое выражение для зарядового формфактора системы двух бесспиновых частиц со взаимодействием в трех формах РКМ. Показано, что результаты расчета формфактора не зависят от выбора формы РКМ.

Показана независимость формфакторов от выбора системы отсчета. Необходимость анализа такого рода связана с выявленным в ряде работ несовпадением расчетов электромагнитных формфакторов (см., например, [84]) в ЛС и БС в рамках мгновенной формы РКМ. Для простоты и наглядности проведено вычисление зарядового формфактора системы двух бесспиновых частиц в БС и ЛС с использованием МИП. Анализ полученных результатов демонстрирует полную эквивалентность формул для формфактора в разных системах отсчета. Таким образом, получено, что несовпадение результатов расчета формфактора в разных системах отсчета связано с использованием ИП, которое приводит к разным результатам в ЛС и в БС, тогда как используемое в диссертационной работе МИП дает в разных системах отсчета одинаковые результаты.

В третьем параграфе проведено обобщение процедуры канонической параметризации матричных элементов токов в мгновенной форме динамики на другие основные формы РКМ при расчете электромагнитного формфактора пиона. Методика построения матричного элемента тока осуществляется в единых обозначениях для трех основных форм одновременно. С использованием МИП получено

аналитическое выражение для электромагнитного формфактора пиона:

$$F_{\pi}(Q^2) = \int \int d\sqrt{s}d\sqrt{s'}G_0(s, Q^2, s')\varphi(s)\varphi(s'), \quad (6)$$

где $G_0(s, Q^2, s')$ - формфактор свободной двухчастичной системы с квантовыми числами пиона.

Выражение (6) полностью совпадает для разных форм РКМ.

Расчет волновых функций, входящих в аналитическое выражение для формфактора (6), осуществляется в четвертом параграфе путем решения вариационной задачи на собственные значения для оператора массы:

$$\hat{M}_I\psi = M_c\psi, \quad \hat{M}_I = \hat{M}_0 + \hat{V}, \quad (7)$$

\hat{M}_0 - оператор массы свободной двухчастичной системы, \hat{V} - оператор взаимодействия, ψ - волновая функция в смысле РКМ.

Далее производится численный расчет электромагнитного формфактора и вычисление среднеквадратичного радиуса пиона. Результаты расчетов дают достаточно хорошее описание экспериментальных данных [85].

В заключении сформулированы основные результаты диссертации.

В приложении 1 приведены аналитические выражения для свободных двухчастичных формфакторов, используемых для описания радиационного распада $\rho \rightarrow \pi\gamma^*$.

В приложении 2 содержатся аналитические выражения для свободных двухчастичных электромагнитных формфакторов с квантовыми числами ρ -мезона.

Глава 1

Релятивистские методы описания составных систем

1.1 Методы квантовой теории поля и составные кварковые модели

Описание спектра наблюдаемых адронов, а также описание их свойств является актуальной задачей физики частиц на протяжении последних десятилетий. Последовательная квантовополевая теория структуры адронов и динамики их взаимодействия - КХД - дает надежные результаты только при описании так называемых "жестких" процессов, которые характеризуются большими переданными импульсами. В области средних и малых переданных импульсов эффективная константа взаимодействия КХД столь сильна, что не позволяет использовать теорию возмущений, оперирующую бесконечным числом частиц. Это приводит к появлению бесконечного набора связанных уравнений, который не может быть решен в замкнутой форме. Численные непертурбативные решения этих уравнений могут быть получены в евклидовом пространстве только для нескольких частных случаев. В связи с этим, для описания связанных состояний необходимо использовать релятивистские методы, которые ограничивают число промежуточных состояний конечным числом частиц.

В таких феноменологических моделях, как правило, предполагается формирование всех адронов из т.н. конституентных кварков с массой порядка 300 MeV , тогда как в КХД фигурируют более легкие токовые кварки с массой $5 - 7 \text{ MeV}$. Для объяснения возникновения конституентных кварков из токовых существуют подходы [49, 50, 51], в рамках которых легкие кварки переходят в массивные конституентные

кварки в результате спонтанного нарушения киральной симметрии. Эту модель обычно называют калибровочной моделью Намбу-Иона-Лазинио с конечным импульсом обрезания Λ и рассматривают ее как некоторую аппроксимацию КХД в области низких энергий [50]. Для скалярного поля полное эффективное действие типа Каданова-Вильсона имеет вид:

$$S_{eff}^{\Lambda} = \int V_{eff} d^4x, \quad (1.1)$$

где V_{eff} -эффективный потенциал.

Эффективный потенциал в адиабатическом приближении имеет следующий вид:

$$V_{eff}(\Lambda, \mu, m, g^2) = \frac{N_c}{8\pi^2} \left[\frac{\Lambda^2}{2} \left(\frac{1}{2} - \ln \frac{\Lambda^2 + m^2}{\mu^2} \right) - \frac{m^2 \Lambda^2}{2} + \right. \\ \left. + \frac{m^4}{2} \ln \frac{\Lambda^2 + m^2}{m^2} + \frac{8\pi^2 m^2}{g^2} \right] + \frac{N_F}{96\pi^2} \ln \frac{\mu^2}{m^2} (G_{\mu\nu}^{\alpha})^2, \quad (1.2)$$

μ имеет смысл масштаба нормировки фермионных полей, m - масса токовых кварков, g - эффективная константа связи, N_c - число цветов, N_F - число ароматов, $G_{\mu\nu}^{\alpha}$ - глюонный конденсат.

В работе [49] в рамках данной модели изучены зависимости массы конституентного кварка от химического потенциала. При увеличении химического потенциала наблюдается сначала рост массы конституентного кварка, а затем выход на константу. Анализ данной зависимости показал, что значение массы конституентного кварка варьируется от 300 MeV до 400 MeV .

Еще одним из наиболее часто используемых методов описания связанных состояний, основанного на квантовой теории поля, является голографический подход КХД. Например, в работе [48] в рамках данного подхода проведены оценки спектра масс некоторых скалярных (π) и векторных (ρ , ω) мезонов. Показано, что различные круговые поляризации дают разное значение эффективной массы.

Несмотря на достигнутые успехи, перспективы вышеперечисленных полевых подходов для описания наблюдаемого спектра мезонов, а также адронов из большего числа кварков остаются неясными.

Перейдем к релятивистским подходам с фиксированным числом частиц. Одну из групп методов описания составных систем с конечным числом степеней свободы, основанных на принципах квантовой

теории поля, составляют квазипотенциальные подходы, связанные с использованием ковариантного полевого уравнения Бете-Солпитера [40, 43, 44]. Точное решение данного уравнения получить достаточно сложно, что связано с четырехмерностью интегрального уравнения. В связи этим, рассмотрим некоторые квазипотенциальные редукции уравнения Бете-Солпитера.

Спектаторное уравнение [26] (или уравнение Гросса) получается путем перевода одного из двух нуклонов на массовую оболочку с положительной энергией. Если первая частица находится на массовой оболочке, то спектаторный пропагатор имеет вид

$$\begin{aligned} G_S(p, P) &= 2\pi\delta_+(m^2 - p_1^2)\Lambda_1(p_1)S_2(p_2) = \\ &= \frac{2\pi\delta\left(E_p - \frac{W}{2} - p_0\right)\Lambda_1^+(\tilde{p}_1)\Lambda_2^+(W - \tilde{p}_1)}{2E_p W(2E_p - W)}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $\hat{p}_1 = (E_p, \mathbf{p})$, $\Lambda_i(p)/2m = (m_i + \hat{p})/2m$ - проекционный оператор на состояния с положительной энергией, W - нулевая компонента 4-импульса в системе центра масс, $S_2(p_2)$ - одночастичный пропагатор.

В равенстве (1.3) относительная энергия фиксируется в терминах относительного 3-импульса таким образом, чтобы сохранить ковариантность и редуцировать интегрирование по четырехмерному пространству к интегрированию по трехмерному. Помещая одну из частиц на массовую оболочку с положительной энергией, мы удаляем состояния с отрицательной энергией одного из нуклонов, сокращая число спиновых степеней свободы до $2 \times 4 = 8$.

Внутреннее интегрирование по импульсам также может быть сведено к трехмерному путем перехода в систему центра масс, в которой в случае равенства масс частиц относительная энергия равна нулю.

В другом квазипотенциальном уравнении - уравнении Блакенбеклера-Шугара-Логунова-Тавхелидзе (BSLT) [45] — обе частицы находятся на массовой оболочке с положительной энергией, что сокращает число спиновых переменных до $2 \times 2 = 4$. Модификация данного уравнения приводит к релятивистской составной кварковой модели, базирующейся на трехмерном уравнении шредингеровского типа [38, 39, 40, 41]:

$$\left(\frac{b^2(M)}{2\mu_R} - \frac{\vec{p}^2}{2\mu_R}\right)\psi_M(\vec{p}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} V(\vec{p}, \vec{q}, M)\psi_M(\vec{q}), \quad (1.4)$$

где

$$\mu_R = \frac{M^4 - (m_1^2 - m_2^2)^2}{4M^3}, \quad (1.5)$$

$$b^2(M) = \frac{[M^2 - (m_1^2 + m_2^2)][M^2 - (m_1^2 - m_2^2)]}{4M^2}, \quad (1.6)$$

M - масса мезона, $m_{1,2}$ - массы конституентных кварков, $V(\vec{p}, \vec{q}, M)$ - квазипотенциальный оператор кварк-антикваркового взаимодействия.

В рамках данного варианта релятивистской составной кварковой модели в работе [38] проведено описание электрослабых свойств некоторых легких мезонов. Для π -, ρ -, K -, ϕ -мезонов рассчитаны спектры масс и константы лептонного распада. Вычислены электромагнитные формфакторы и среднеквадратичные радиусы π - и K -мезонов. Проведенные вычисления и расчеты имеют хорошее согласие с экспериментом. Данная модель также с успехом применена для оценки спектра масс тяжелых мезонов (например, B - и D -мезонов). В рамках описания электрослабых свойств, в работах [39, 40] исследованы полуплеитонные распады тяжелых B -мезонов в легкие π - и ρ -мезоны. Определены формфакторы и ширины данных распадов. Вычисленные ширины распадов имеют хорошее согласие с экспериментом.

В работе [41] изучены спектры масс тяжелых барионов в кварк-дикварковом приближении, а также четырех-кварковых состояний. Рассчитаны спектры масс тяжелых кваркониев и B_c -мезона с использованием разложения v/c вплоть до членов второго порядка.

В еще одном квазипотенциальном подходе - подходе Филиппса, Уоллеса и Мандельцвейга [46, 47] (PWM) - обе частицы помещают вне массовой оболочки, но включает все вклады с отрицательной энергией. В этом случае пропагатор для частиц одинаковой массы в СЦМ имеет вид:

$$\begin{aligned} G_{PWM}(p, P) &= \int dp_0 G_{PWM}(p, P) \\ &= \int dp_0 (S_1(p_1)S_2(p_2) + G_C(p, P)) = \left(\frac{\Lambda_1^+(\tilde{p}_+) \Lambda_2^+(\tilde{p}_-)}{2E_p - W} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Lambda_1^-(\tilde{p}_+) \Lambda_2^-(\tilde{p}_-)}{2E_p + W} + \frac{\Lambda_1^+(\tilde{p}_+) \Lambda_2^-(\tilde{p}_-)}{2E_p} + \frac{\Lambda_1^-(\tilde{p}_+) \Lambda_2^+(\tilde{p}_-)}{2E_p} \right). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Этот пропагатор отличается от соответствующих величин в BSLT-подходе главным образом наличием дополнительного члена G_C , включающего вклады перекрестных диаграмм.

Основная трудность этого метода заключается в проблематичности построения оператора тока, а также в утрате инвариантности относительно преобразований Пуанкаре.

Альтернативным к квантовополевым методам можно отнести подход, базирующийся на прямой реализации алгебры Пуанкаре на множестве динамических наблюдаемых системы. Этот подход используется в настоящей диссертационной работе и называется теорией прямого взаимодействия или релятивистской квантовой механикой с фиксированным числом частиц (РКМ) [52]. Перейдем к изложению основных положений РКМ.

1.2 Квантомеханические представления группы Пуанкаре

В теории элементарных частиц пространство-время можно считать однородным и изотропным, а геометрию - псевдо-евклидовой. В соответствии с этим должен выполняться принцип относительности, т.е. должна иметь место равноправность систем отсчета, отличающихся друг от друга по ориентации и местоположению в пространстве, выбору начального момента времени и относительной скорости (равномерного и прямолинейного движения одной системы отсчета относительно другой). Все такие (инерциальные) системы эквивалентны в том отношении, что в любых двух системах соответствующие физические явления протекают одинаково. Связывая координату x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) с системой отсчета, мы постулируем, следовательно, инвариантность физических законов относительно линейных преобразований от одной системы отсчета к другой (см., например, [86]):

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu, \quad (1.8)$$

при условии, что сохраняется квадрат длины интервала

$$(x - y)^2 = (x_\mu - y_\mu)(x^\mu - y^\mu). \quad (1.9)$$

Линейные преобразования, сохраняющие форму (1.8), образуют неоднородную группу Лоренца, или группу Пуанкаре. Среди них содержатся не только смещения и вращения (обычные и гиперболические) в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве, но и отражения пространства-времени P, T :

$$Px^k = -x^k, \quad Px^0 = x^0; \quad Tx^k = x^k, \quad Tx^0 = -x^0; \quad PTx^\mu = -x^\mu, \quad (1.10)$$

где $k = 1, 2, 3$; $\mu = 0, 1, 2, 3$.

Интервал (1.9) остается неизменным, если коэффициенты Λ_μ^ν удовлетворяют условиям:

$$\Lambda_\mu^\nu \Lambda_\sigma^\mu = \delta_\sigma^\nu, \quad \Lambda_\mu^\nu = g_{\mu\rho} \Lambda_\beta^\rho g^{\beta\nu}, \quad (1.11)$$

где отличные от нуля величины $g_{\mu\nu}$ равны: $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1$.

Из второго соотношения (1.11) следует, что определитель матрицы Λ в общем случае равен:

$$\det \Lambda = \pm 1. \quad (1.12)$$

Из равенств (1.11) следует также, что коэффициенты Λ_μ^ν обладают следующим свойством:

$$(\Lambda^{00})^2 - \sum_k (\Lambda^{0k})^2 = 1, \quad (1.13)$$

или же

$$(\Lambda^{00})^2 \geq 1. \quad (1.14)$$

Это значит, что существует две возможности:

$$\Lambda^{00} \geq 1, \quad \Lambda^{00} \leq -1. \quad (1.15)$$

Таким образом, общие преобразования (1.8) могут быть подразделены на 4 класса, отличающиеся знаками величин $\det \Lambda$ и Λ^{00} .

Эти классы преобразований соответствуют следующим связным компонентам общей группы Пуанкаре.

1. P_+^\uparrow : $\det \Lambda = 1, (\Lambda^{00}) \geq 1$.
2. P_+^\downarrow : $\det \Lambda = 1, (\Lambda^{00}) \leq -1$.
3. P_-^\uparrow : $\det \Lambda = -1, (\Lambda^{00}) \geq 1$.
4. P_-^\downarrow : $\det \Lambda = -1, (\Lambda^{00}) \leq -1$.

Общая группа Пуанкаре может быть символически изображена в виде суммы:

$$P = P_+^\uparrow + PTP_+^\uparrow + PP_+^\uparrow + TP_+^\uparrow, \quad (1.16)$$

где отдельные слагаемые соответствуют компонентам 1 - 4.

Из компонент (1-4) группы Пуанкаре только первая P_+^\uparrow содержит единичное преобразование. Поэтому преобразования, принадлежащие к разным классам, не могут быть связаны каким-либо непрерывным преобразованием, относящимся к P_+^\uparrow . Преобразования одного и того же класса могут быть получены друг из друга с помощью преобразований из P_+^\uparrow .

Классификация состояний частиц в первую очередь связана с изучением собственной ортохронной группы P_+^\uparrow . Элемент (a, Λ) группы P_+^\uparrow описывается 4-вектором смещения a^μ и ортохронным преобразованием Λ . Закон умножения двух элементов (a_1, Λ_1) и (a_2, Λ_2) имеет следующий вид:

$$(a_1, \Lambda_1)(a_2, \Lambda_2) = (a_1 + \Lambda_1 a_2, \Lambda_1 \Lambda_2). \quad (1.17)$$

В частности, $(a, \Lambda) = (a, 1)(0, \Lambda)$ в согласии с определением (1.8) неоднородного преобразования как произведения однородного преобразования и последующего смещения. Единичный элемент группы P_+^\uparrow равен $E = (0, 1)$, а обратный элемент записывается в виде

$$(a, \Lambda)^{-1} = (-\Lambda^{-1}a, \Lambda^{-1}). \quad (1.18)$$

Преобразование (a, Λ) характеризуется 10 параметрами: 4 смещения a^μ , 3 параметрами трехмерных вращений и 3 параметрами, связанными с переходом к другой инерциальной системе ("гиперболическими вращениями"). Шесть параметров лоренцева преобразования Λ удобно ввести, воспользовавшись тем фактом, что любое Λ можно представить как произведение чисто лоренцева преобразования K (без вращения осей) и трехмерного вращения R :

$$\Lambda = RK. \quad (1.19)$$

Следует отметить, что пространство параметров группы вращений двусвязно, поэтому в квантовой механике физические состояния должны преобразовываться при преобразованиях Лоренца по унитарным представлениям не самой группы Пуанкаре, а ее универсальной накрывающей или квантомеханической группы Пуанкаре. По отношению к однородной группе Лоренца универсальной накрывающей группой служит группа комплексных специальных линейных 2×2 матриц $SL(2, C)$.

Группа $SL(2, C)$

Рассмотрим комплексную матрицу второго порядка $\hat{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, где комплексные параметры $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ограничены условием унимодулярности:

$$\det \hat{A} = \alpha\delta - \beta\gamma = 1. \quad (1.20)$$

Базисными элементами для матриц второго порядка служат матрицы σ_μ , включающие матрицы Паули и единичную матрицу:

$$\sigma_0 = I, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

Связь между матрицами и лоренцевыми 4-векторами имеет вид:

$$\Lambda_\nu^\mu(A) = \frac{1}{2} Sp(\sigma_\mu A \sigma_\nu A^+). \quad (1.22)$$

Из формулы (1.22) следует, что каждое преобразование Λ_ν^μ может осуществляться двумя матрицами A , отличающимися знаком:

$$\Lambda_\nu^\mu(A) = \Lambda_\nu^\mu(-A). \quad (1.23)$$

Наблюдаемые в группе Пуанкаре

Обратимся к бесконечно малым преобразованиям и формулу (1.8) перепишем так:

$$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu + \omega_\nu^\mu x^\nu, \quad (1.24)$$

где бесконечно малые параметры ε^μ и ω_ν^μ вещественны.

Бесконечно малое преобразование координат влечет за собой изменение векторов состояния $|\gamma\rangle \rightarrow (1 + \delta U)|\gamma\rangle$, которое вследствие непрерывности преобразования будет также бесконечно мало:

$$\delta U = iP_\mu \varepsilon^\mu - \frac{i}{2} \mathbf{M}_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu}. \quad (1.25)$$

По преобразованию (1.25) можно построить конечное преобразование. Таким образом, унитарные операторы $U(a, 1)$ и $U(0, \Lambda)$ имеют следующий общий вид:

$$U(a, 1) = \exp(iP_\mu a^\mu), \quad U(0, \Lambda) = \exp\left(-\frac{i}{2} \mathbf{M}_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu}\right). \quad (1.26)$$

Величина iP_μ есть генератор смещений по оси x^μ , - $i\mathbf{M}_{jk}$ - генератор вращений в плоскости (jk) , а величина - $i\mathbf{M}_{0j}$ - генератор лоренцева преобразования без вращений.

Перечисленные 10 генераторов, соответствующих 10 однопараметрическим преобразованиям группы Пуанкаре, и являются основными величинами в релятивистской квантовой механике. Величину P_μ называют вектором энергии-импульса или 4-импульсом; 3-вектор $\vec{\mathbf{M}} = (\mathbf{M}_{12}, \mathbf{M}_{23}, \mathbf{M}_{31})$ есть момент импульса. Вместо компонент \mathbf{M}_{0j} часто вводится 3-вектор бустов $\vec{K} = (\mathbf{M}_{01}, \mathbf{M}_{02}, \mathbf{M}_{03})$. Генераторы P^μ и $\mathbf{M}^{\mu\nu}$ удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} [P^\mu, P^\nu] &= 0, & [\mathbf{M}^{\mu\nu}, P^\rho] &= -i(g^{\mu\rho}P^\nu - g^{\nu\rho}P^\mu), \\ [\mathbf{M}^{\mu\nu}, \mathbf{M}^{\rho\sigma}] &= -i(g^{\mu\rho}\mathbf{M}^{\nu\sigma} + g^{\nu\sigma}\mathbf{M}^{\mu\rho} - g^{\mu\sigma}\mathbf{M}^{\nu\rho} - g^{\nu\rho}\mathbf{M}^{\mu\sigma}). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Если ввести оператор J_i , определяемый равенством:

$$\hat{J}_i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\widehat{\mathbf{M}}^{jk}, \quad \hat{K}_i = \widehat{\mathbf{M}}_{i0}, \quad (1.28)$$

а также оператор $\hat{H} = \hat{P}^0$ (гамильтониан), то перестановочные соотношения (1.27) примут вид [87]:

$$\begin{aligned} [\hat{P}^i, \hat{P}^j] &= 0, & [\hat{P}^i, \hat{H}] &= 0, & [\hat{J}^q, \hat{P}^j] &= i\varepsilon_{qjk}\hat{P}^k, & [\hat{J}^i, \hat{H}] &= 0, \\ [\hat{J}^q, \hat{J}^j] &= i\varepsilon_{qjk}\hat{J}^k, & [\hat{P}^k, \hat{K}^j] &= i\delta_{kj}\hat{H}, \\ [\hat{K}^j, \hat{H}] &= -i\hat{P}^j, & [\hat{J}^q, \hat{K}^j] &= i\varepsilon_{qjk}\hat{K}^k, & [\hat{K}^q, \hat{K}^j] &= -i\varepsilon_{qjk}\hat{J}^k. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Легко проверить, что имеется только одна комбинация генераторов $\mathbf{M}_{\nu\lambda}$ и P_μ , которая коммутирует с импульсами P_λ , а именно оператор

$$W^\mu = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\mathbf{M}^{\nu\lambda}P^\sigma, \quad (1.30)$$

где $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$ - полностью антисимметричный тензор четвертого ранга, $\varepsilon_{0123} = -1$.

Оператор W^μ носит название оператора Любанского-Паули и обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} W_\mu P^\mu &= 0, & [W_\nu P^\lambda] &= 0, \\ [\mathbf{M}^{\mu\nu} W^\rho] &= i(W^\mu g^{\nu\rho} - W^\nu g^{\mu\rho}), & [W^\mu W^\nu] &= i\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}W_\lambda P_\sigma. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Квадрат псевдовектора W_μ есть скаляр и, следовательно, коммутирует с $\mathbf{M}_{\mu\nu}$. Поэтому $W^2 = W_\mu W^\mu$ коммутирует со всеми 10 генераторами. Явное выражение для W^2 есть

$$W^2 = \frac{1}{2} \mathbf{M}_{\mu\nu} \mathbf{M}^{\mu\nu} P_\lambda P^\lambda - \mathbf{M}_{\mu\sigma} \mathbf{M}^{\nu\sigma} P^\mu P_\nu . \quad (1.32)$$

Физический смысл инварианта W^2 выясняется просто при $M^2 > 0$. Введем одночастичный вектор состояния в гильбертовом пространстве:

$$|\vec{p} = 0, M\rangle , \quad (1.33)$$

p -трехмерный импульс частицы, M -масса частицы. При действии инварианта W^2 на вектор состояния (1.33) получим:

$$W^2 |\vec{p} = 0, M\rangle = -M^2 (\mathbf{M}_{12}^2 + \mathbf{M}_{23}^2 + \mathbf{M}_{31}^2) |\vec{p} = 0, M\rangle = -M^2 \vec{\mathbf{M}}^2 |\vec{p} = 0, M\rangle . \quad (1.34)$$

Иначе говоря, величина $-W^2/M^2$ равна квадрату момента импульса $\vec{\mathbf{M}}^2$ в состоянии покоя, т.е. квадрату спина. Собственные значения $\vec{\mathbf{M}}^2$, как известно, имеют вид $J(J+1)$, где $J = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ [88].

1.3 Формы РКМ

Как уже было упомянуто выше, идея РКМ восходит к работе Дирака [53], в которой рассматривались различные способы описания эволюции классических релятивистских систем - различные формы динамики. В этой работе Дирак ввел три основных типа динамики: точечную, мгновенную и динамику на световом фронте. Каждую из этих динамик можно связать с трехмерной гиперповерхностью в четырехмерном пространстве, на которой задаются начальные условия и эволюция которой описывается в дальнейшем. В частности, мгновенная форма соответствует выбору гиперповерхности $t_0 = 0$; время, определяющее эволюцию системы, совпадает с обычным временем t . В отличие от этого, динамика на световом фронте конструируется на гиперповерхности $t + z = 0$, к одному моменту времени принадлежат все события, находящиеся на фронте световой волны. Поэтому все, что происходит с частицей, движущейся со скоростью, близкой к скорости света, в рамках динамики светового фронта происходит в один и тот же момент времени. Наконец, в рамках точечной формы состояния конструируются

на гиперboloиде $t^2 - \mathbf{r}^2 = a^2$, $t > 0$. В предельных случаях $a = \infty$ приводит нас к мгновенной форме динамики, $a = 0$ — к динамике на световом фронте. Эти три поверхности изображены на рис. 1.1.

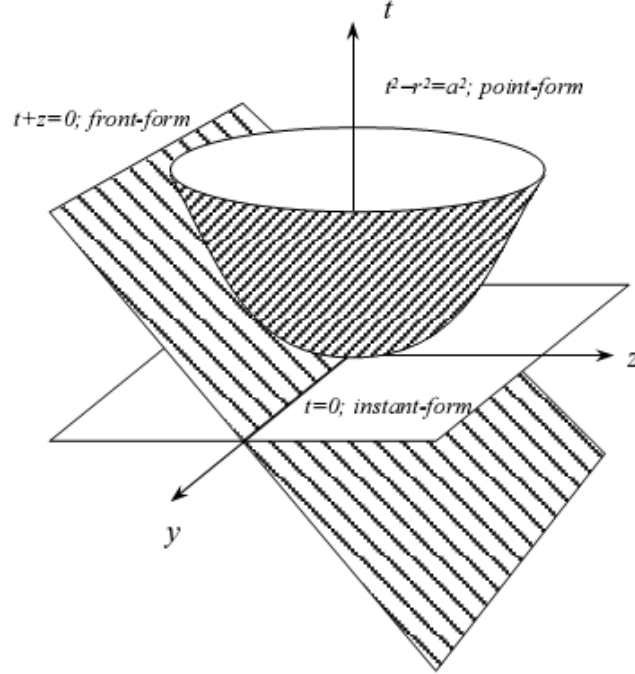


Рис. 1.1: Представление форм РКМ в виде поверхностей в четырехмерном пространстве.

В нерелятивистской квантовой механике при включении взаимодействия оператор взаимодействия добавляется в оператор полной энергии: $\hat{H} \rightarrow \hat{H} + \hat{V}$. Алгебра группы инвариантности нерелятивистской квантовой механики — группа Галилея — не содержит в правых частях коммутационных соотношений генератор \hat{H} , так что для сохранения алгебры группы Галилея нет необходимости включать взаимодействие в другие генераторы группы.

Иначе обстоит дело в случае группы Пуанкаре. Рассмотрим один из генераторов алгебры (1.29):

$$[\hat{P}^k \hat{K}^j] = i \delta_{kj} \hat{H} . \quad (1.35)$$

При описанном выше включении взаимодействия в оператор полной энергии правая часть (1.35) будет зависеть от взаимодействия, значит, от взаимодействия должны зависеть либо оба генератора в левой части (1.35), либо один из них. Таким образом, чтобы сохранить

коммутационные соотношения в (1.29), необходимо сделать зависящими от взаимодействия и другие генераторы в наборе (1.29). Генераторы алгебры разделяются при этом на два типа: генераторы, не зависящие от взаимодействия и образующие т.н. кинематическую подгруппу, и генераторы, зависящие от взаимодействия — гамильтонианы. Каждому выбору гиперповерхности, на которой задаются вектора начального состояния, то есть, каждой форме динамики, соответствует свой способ выделения кинематической подгруппы. Генераторы, которые не меняют положение гиперповерхности являются кинематическими, динамические же генераторы изменяют положение гиперповерхности в четырехмерном пространстве, т.е. описывают ее эволюцию.

Рассмотрим структуру генераторов в основных формах динамики. Наиболее часто используемой в настоящее время для описания электрослабых свойств составных систем является динамика на световом фронте (см., например, [89]–[102]).

В динамике на световом фронте кинематическую подгруппу группы Пуанкаре образуют операторы:

$$\hat{E}_\perp = (\hat{E}^x, \hat{E}^y), \quad \hat{K}^z, \quad \hat{J}^3, \\ \hat{P}^+, \quad \hat{P}_\perp = (\hat{P}^x, \hat{P}^y),$$

где

$$\hat{E}^x = \hat{K}^x + \hat{J}^y, \quad \hat{E}^y = \hat{K}^y - \hat{J}^x, \quad (1.36)$$

$$\hat{P}^+ = \frac{(\hat{P}^0 + \hat{P}^z)}{\sqrt{2}}. \quad (1.37)$$

Взаимодействие включают в следующие операторы:

$$\hat{P}^-, \quad \hat{J}_{1,2}.$$

Роль энергии выполняет величина

$$P^- = \frac{(P^0 - P^z)}{\sqrt{2}}, \quad (1.38)$$

которая связана с массой следующим соотношением:

$$M^2 = P^+ P^- - P_\perp^2. \quad (1.39)$$

В динамике на световом фронте данные операторы удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} [\hat{P}^x \hat{P}^y] &= [\hat{P}^x \hat{P}^+] = [\hat{J}^z \hat{P}^+] = [\hat{E}^x \hat{E}^y] = [\hat{E}^x \hat{H}^+] = \\ &= [\hat{J}^z \hat{K}^z] = [\hat{K}^z \hat{P}^x] = 0. \end{aligned} \quad (1.40)$$

$$\begin{aligned} [\hat{J}^z \hat{P}^x] &= i\varepsilon_{jk} \hat{P}^y, \quad [\hat{J}^z \hat{E}^x] = i\varepsilon_{jk} \hat{E}^y, \quad [\hat{E}^x \hat{P}^y] = -i\delta_{jk} \hat{H}^+, \\ [\hat{K}^z \hat{P}^+] &= -i\hat{P}^+, \quad [\hat{K}^z \hat{E}^x] = -i\hat{E}^x, \end{aligned}$$

где

$$j, k = (1, 2), \quad \varepsilon_{12} = 1, \quad \varepsilon_{21} = -1, \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0.$$

Использование именно динамики на световом фронте является следствием того, что эта форма динамики имеет очевидные достоинства:

1. Наименьшее число операторов, содержащих взаимодействие - три.
2. Простое релятивистки инвариантное отделение "внутренних" и "внешних" переменных при формулировке ее как гамильтоновой теории с фиксированным числом частиц.
3. Простая структура вакуума при построении пертурбативной полевой теории на световом фронте.

Однако, в динамике на световом фронте существуют трудности, которые преодолеваются достаточно сложным образом. Например, было обнаружено, что результаты расчета электромагнитных формфакторов системы с полным моментом $J = 1$ (дейтрон, ρ -мезон) существенно изменяются при вращении системы отсчета. Эта неоднозначность определения электромагнитных формфакторов составной системы представляет собой существенную проблему. Она связана с нарушением т.н. углового условия, которое фактически является математическим выражением условия вращательной инвариантности теории [102].

В мгновенной форме динамики (см., например, [60]–[63], [103]–[108]) кинематическую подгруппу составляют операторы группы вращений и сдвигов евклидова пространства

$$\hat{J}, \hat{P}, \quad (1.41)$$

с коммутационными соотношениями (1.29).

Остальные операторы являются гамильтонианами, т.е. зависят от взаимодействия:

$$\hat{P}^0, \hat{K}. \quad (1.42)$$

Мгновенная форма динамики имеет свои преимущества. К этим преимуществам относятся, например, естественный выбор переменных, описывающих состояние, естественный нерелятивистский предел, вращательная инвариантность, позволяющая корректным образом описывать спиновые эффекты.

В последние годы получила распространение точечная форма динамики (см., например, [109]–[118]). В точечной форме динамики кинематическую группу составляют операторы преобразования Лоренца и вращений:

$$\hat{J}, \hat{K} \quad (1.43)$$

с коммутационными соотношениями (1.29).

От взаимодействия зависит лишь генератор пространственно-временных трансляций \hat{P} . Поскольку в точечной форме $\hat{P} = \hat{M}\hat{V}$ (\hat{V} -оператор скорости), то взаимодействие включается только в оператор массы.

Результаты анализа физических явлений в каждой из перечисленных динамик должны быть одинаковы, однако математическое описание явлений с использованием основных форм динамики может быть различным, в частности, в какой-то из них оно может быть более простым. Из-за непертурбативности невозможно заранее сказать, в рамках какой из динамик описание релятивистских свойств составных систем является наиболее эффективным.

Процедура Бакамджана-Томаса

Одним из технических способов включения взаимодействия в алгебру (1.35), позволяющих сохранить коммутационные соотношения, является аддитивное включение взаимодействия в оператор массы - т.н. процедура Бакамджана-Томаса [113, 119]:

$$\hat{M}_0 \rightarrow \hat{M}_I = \hat{M}_0 + \hat{V}. \quad (1.44)$$

Здесь \hat{M}_0 – оператор инвариантной массы системы без взаимодействия, \hat{M}_I – оператор массы системы со взаимодействием.

Обсудим методику включения взаимодействия в оператор массы на примере мгновенной формы динамики (процедура Бакамджана-Томаса для точечной формы динамики и динамики на световом фронте осуществляется по аналогии).

В мгновенной форме динамики оператор взаимодействия должен удовлетворять следующим условиям:

$$\hat{M}_I = \hat{M}_I^+ , \quad \hat{M}_I > 0 , \quad (1.45)$$

$$\left[\hat{\vec{P}}, \hat{V} \right] = \left[\hat{\vec{J}}, \hat{V} \right] = \left[\vec{\nabla}_P, \hat{V} \right] = 0 . \quad (1.46)$$

Условия (1.45) представляют собой спектральные условия для массового оператора. Равенства (1.46) обеспечивают выполнение алгебраических соотношений (1.35) в системе со взаимодействием. Соотношения (1.46) не являются слишком ограничительными, например, им удовлетворяет любой нерелятивистский потенциал взаимодействия частиц. Равенства (1.46) означают, что потенциал взаимодействия не зависит от полного импульса системы, что для некоторых конкретных видов потенциалов, например, для сепарабельных, является обоснованным [120]. Тем не менее, условия (1.44) и (1.46) являются модельными.

Наряду с оператором \hat{V} , можно ввести взаимодействие другим способом:

$$\hat{U} = (1/4)(\hat{M}_I^2 - \hat{M}_0^2) = (1/4)(\hat{V}^2 + [\hat{M}_0, \hat{V}]_+) . \quad (1.47)$$

Взаимодействие (1.47) вводится из соображений удобства, поскольку в этом случае проблема нахождения собственного значения оператора массы может быть представлена в виде, аналогичном нерелятивистскому уравнению Шредингера (см., например, [52]). В силу своего определения оператор (1.47) также удовлетворяет условиям (1.46).

Волновая функция системы взаимодействующих частиц в РКМ определяется как собственная функция полного коммутирующего набора операторов.

В мгновенной форме динамики этот набор составляют операторы:

$$\hat{M}_I^2 \text{ (или } \hat{M}_I), \quad \hat{J}^2, \quad \hat{J}_3, \quad \hat{\vec{P}} . \quad (1.48)$$

\hat{J}^2 – оператор квадрата полного момента количества движения. В мгновенной форме динамики операторы \hat{J}^2 , \hat{J}_3 , $\hat{\vec{P}}$ совпадают с

соответствующими операторами системы без взаимодействия. Таким образом, от взаимодействия в (1.48) зависит только оператор \hat{M}_I^2 (\hat{M}_I).

Расчеты электрослабых характеристик мезонов для основных форм РКМ

Перейдем к рассмотрению некоторых расчетов, использующих основные формы РКМ.

В работе [121] для расчета формфактора дейтрона в мгновенной форме используются матричные элементы одночастичных операторов заряда и тока на массовой оболочке:

$$j_N^\mu(p', p) = \left(\frac{m^2}{E(p')E(p)} \right)^{1/2} \bar{u}(p', s') \left[F_1(Q^2)\gamma^\mu + \frac{F_2(Q^2)}{2m} i\sigma^{\mu\nu} q_\nu \right] u(p, s). \quad (1.49)$$

Здесь F_1 и F_2 — формфакторы Дирака и Паули, обычно заменяемые на зарядовый и магнитный формфакторы Сакса:

$$\begin{aligned} G_E(Q^2) &= F_1(Q^2) - \frac{Q^2}{4m^2} F_2(Q^2), \\ G_M(Q^2) &= F_1(Q^2) + F_2(Q^2). \end{aligned} \quad (1.50)$$

Вычисления производятся в импульсном пространстве, где одночастичный оператор тока вычислен без разложения по v/c . Вместо обычно используемого нерелятивистского разложения $m + \vec{p}^2/(2m)$ используется релятивистская кинетическая энергия $\sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$. В дейтронную волновую функцию включены бустовые поправки.

В работе [122] авторы проводят последовательное разложение релятивистских вкладов, возникающих из одночастичного оператора тока и вкладов мезонных обменов, по параметру v/c . Оператор тока (1.49) аппроксимируется следующим выражением:

$$\begin{aligned} j_N^\mu(p, p') &\simeq F_1 \left(1 - \frac{\vec{q}^2}{8m^2} \right) - F_2 \frac{\vec{q}^2}{4m^2} + (2G_M - F_1) \left[\frac{i\sigma \cdot (\vec{q} \times \vec{p})}{4m^2} \right], \quad \mu = 0, \\ j_N^\mu(p, p') &\simeq F_1 \frac{(\vec{p}' + \vec{p})^i}{2m} + G_M \frac{i[\sigma \times \vec{q}]^i}{2m} + \mathcal{O}[(v/c)^3], \quad \mu = i, \end{aligned} \quad (1.51)$$

где $j_N^\mu = j_p^\mu$ или j_n^μ (с соответствующими F_1 и F_2), σ - матрицы Паули, и $\vec{q} = \vec{p}' - \vec{p}$ - 3-импульс, переданный электроном. Поправка к зарядовому

оператору $\vec{q}^2/8m^2$ относится к члену Дарвина-Фолди, $\sigma \cdot (\vec{q} \times \vec{p})$ — спин-орбитальный член.

Перейдем теперь к работе [62], в которой в рамках мгновенной формы РКМ развита методика параметризации матричных элементов локальных операторов. Данная методика является основой для настоящей диссертационной работы и с успехом применяется к описанию двухчастичных составных систем. Например, в работах [123, 124, 125] производится расчет электромагнитного формфактора пиона, включая как пространственноподобную [123, 124], так и времениподобную области [125]. Проведенные расчеты [123, 124, 125] хорошо согласуются с экспериментальными данными и предсказаниями КХД (см. подробности в [103, 105, 126]).

В работе [127] рассматривается электромагнитная структура дейтрона. С использованием методики диагональной параметризации матричных элементов токов, вычисляются электромагнитные формфакторы дейтрона, а также тензор поляризации $T_{20}(Q^2)$. Результаты расчетов совпадают с экспериментом. В [128] проводится асимптотическая оценка дейтронных формфакторов, имеющая хорошее согласие с предсказаниями КХД.

Приведем теперь пример работ, использующих формализм динамики на световом фронте (см., например, [96, 97, 98]). Как уже было сказано выше, расчеты в динамике на световом фронте приводят к несохранению углового момента. Рассмотрим проблему сохранения углового момента в этом подходе.

При вычислении формфакторов в данном формализме обычно выбирается система координат, где $q^\pm = q^0 \pm q^z = 0$ и $q_\perp = \vec{Q}$. Таким образом, закон сохранения тока удовлетворялся только если одна из его компонент (J^+) была ненулевой. Рассмотрим матричные элементы оператора тока ρ -мезона, $J_{\lambda'\lambda}^+$, где λ' (λ) — спиральности конечного (начального) состояния ρ - мезона. Следовательно, вращательная инвариантность означает, что 4 независимых матричных элемента тока J^+ связаны ограничением

$$J_{00}^+ + 2\sqrt{2\eta}J_{+0}^+ - J_{+-}^+ - (1 + 2\eta)J_{++}^+ = 0. \quad (1.52)$$

Формфакторы ρ -мезона могут быть вычислены из любого выбора трех матричных элементов $J_{\lambda'\lambda}^+$, и если условие (1.52) не удовлетворяется, разные выборы дают различные результаты. Формфакторы не

определены до тех пор, пока это условие не будет удовлетворено.

Чтобы обойти эту проблему, авторы работают в брейтовской системе отсчета, где $q^\pm = \pm Q$, а $q_\perp = 0$. Таким образом, закон сохранения требует, чтобы $J^+ = J^-$.

Оператор тока, который удовлетворяет этим условиям, вычислен в работе [95]. В случае упругого рассеяния он имеет вид

$$J^\alpha = \frac{1}{2} \left[J_{free}^{\alpha'} + L_\nu^\mu e^{i\pi S_x} \left(J_{free}^{\alpha'} \right)^* e^{-i\pi S_x} \right], \quad (1.53)$$

где J_{free} — свободный (одночастичный) оператор тока, L_ν^μ и $e^{i\pi S_x}$ — повороты на $-\pi$ вокруг оси x : L_ν^μ в векторном, $e^{i\pi S_x}$ в спинорном пространстве. Используя такой оператор тока вычисляются электромагнитные формфакторы, статические моменты ρ -мезона. Рассчитываются среднеквадратичные радиусы пиона и каона. Проводится оценка тензора энергии импульса $T_{20}(Q^2)$ - ρ -мезона.

В случае точечной формы динамики не возникает затруднений в определении ковариантных матричных элементов, однако возникает сложность с выполнением условия сохранения электромагнитного тока. Авторы [113, 115, 118] работают в брейтовской системе отсчета, выбирая одночастичный импульсный ток для описания $\mu = 0, 1, 2$ компонент тока и вводят двухчастичный ток J_2^z , который не вычисляется, для удовлетворения закона сохранения тока. Так, например, изучается электромагнитная структура пиона и дейтрона.

1.4 Релятивистские векторы состояния в РКМ

Одночастичные состояния в каноническом базисе

Для описания релятивистской частицы необходимо рассмотреть неприводимые пространства, в которых действуют представления квантомеханической группы Пуанкаре. Для этого вводят систему базисных векторов состояний в гильбертовом пространстве.

В качестве примера мы приведем один из базисов - канонический базис, применимый при $M^2 > 0$ в мгновенной форме. В каноническом базисе диагональны компоненты импульса p_k , ($k = 1, 2, 3$) и проекция спина j_3 на заданную фиксированную ось, ортогональную 4-импульсу p_μ . Иначе говоря, полный набор взаимно коммутирующих величин содержат

в этом случае операторы:

$$M^2, \quad j^2, \quad p_j, \quad j_3 = \frac{1}{M}\omega^\lambda n_\lambda^{(3)}, \quad (n^{(3)})^2 = -1, \quad p^\lambda n_\lambda^{(3)} = 0, \quad (1.54)$$

где $n_\lambda^{(3)}$ - единичный вектор, ортогональный импульсу, m - собственное значение оператора j_3 , j - полный спин, \vec{p} и M - 3-импульс и масса частицы, соответственно.

Вектор состояния одной частицы запишется в виде:

$$|\vec{p}, m, M, j\rangle, \quad (1.55)$$

В дальнейшем для краткости будут опускаться наблюдаемые M и j . Вектор состояния (1.55) образует полный и ортонормированный базис в гильбертовом пространстве состояний частицы.

Условие нормировки можно записать в виде:

$$\langle \vec{p}', m' | \vec{p}, m \rangle = 2p_0 \delta(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{m, m'}. \quad (1.56)$$

Оператор $U(a, \Lambda)$, представляющий в гильбертовом пространстве состояний группу Пуанкаре, действует на состояния $|\vec{p}, m\rangle$ следующим образом (см., например, [86]):

$$U(a, \Lambda)|\vec{p}, m\rangle = \exp(ipa) \sum_{m'} |\Lambda\vec{p}, m'\rangle D_{m, m'}^j(R_w), \quad (1.57)$$

где $D_{m, m'}^j(R_w)$ - матрица вигнеровского вращения. При преобразованиях Лоренца спиновые переменные преобразуются с помощью D - матриц [108]. Из определения вигнеровского поворота

$$R_w = L_{\Lambda_p}^{-1} \Lambda L_p \quad (1.58)$$

видно, что матрица преобразования спина $D(R_w)$ будет зависеть от импульса частицы.

Отметим основные свойства D - матриц:

$$D^j(p_1 p_2) D^j(p_2 p_3) = D^j(p_1 p_3) \quad [D^j(p_1 p_2)]^{-1} = D^j(p_2 p_1). \quad (1.59)$$

Состояния двух частиц в каноническом базисе

В соответствии с общими принципами квантовой механики вектор состояния двух свободных частиц с импульсами \vec{p}_1, \vec{p}_2 и проекциями

m_1, m_2 спинов на ось квантования в их системах покоя должен строиться как прямое произведение векторов состояния отдельных частиц:

$$|\vec{p}_1, m_1; \vec{p}_2, m_2\rangle = |\vec{p}_1, m_1\rangle \otimes |\vec{p}_2, m_2\rangle . \quad (1.60)$$

Если подействовать унитарным оператором $U(a, \Lambda)$ на вектор состояния (1.60), получим:

$$\begin{aligned} U(a, \Lambda)|\vec{p}_1, m_1; \vec{p}_2, m_2\rangle &= U(a, \Lambda)|\vec{p}_1, m_1\rangle \otimes U(a, \Lambda)|\vec{p}_2, m_2\rangle = \\ &= \exp[i(p_1 + p_2)a] \sum_{m'_{1,2}} |\Lambda\vec{p}_1, m'_1\rangle \otimes |\Lambda\vec{p}_2, m'_2\rangle \cdot \\ &\cdot D_{m'_1, m_1}^{j_1}(R_1) D_{m'_2, m_2}^{j_2}(R_2) , \end{aligned} \quad (1.61)$$

где $R_{1,2}$ - определенные в (1.58) вignerовские повороты.

Наряду с векторами $|\vec{p}_1, m_1; \vec{p}_2, m_2\rangle$ важную роль при анализе свойств двух и более частиц играют векторы:

$$|\vec{P}, \vec{k}, m_1, m_2\rangle, \quad (1.62)$$

где $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, $\vec{k} = \frac{1}{2}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)$ - относительный импульс в системе центра инерции (СЦИ). Переход в СЦИ осуществляется следующим образом:

$$|\vec{P} = 0, \vec{k}, m_1, m_2\rangle = |\vec{k}, m_1\rangle \otimes |-\vec{k}, m_2\rangle . \quad (1.63)$$

Преобразование (1.60) осуществляется посредством лоренцевского буста L_P :

$$P = L_P \tilde{P}, \quad \vec{p}_1 = L_P \tilde{p}_1, \quad \vec{p}_2 = L_P \tilde{p}_2,$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= (\tilde{P}_0, 0), \quad \tilde{p}_1 = (p_{10}, \vec{k}), \quad \tilde{p}_2 = (p_{20}, -\vec{k}) \\ \tilde{P}_0 &= p_{10} + p_{20}, \quad p_{10} = \sqrt{M_1^2 + k^2}, \quad p_{20} = \sqrt{M_2^2 + k^2}, \end{aligned}$$

M_1 и M_2 - массы первой и второй частиц, соответственно.

Таким образом, вектор состояния в СЦИ представляется в виде:

$$\begin{aligned} |\vec{P}, \vec{k}, m_1, m_2\rangle &= U(L_P)|\vec{k}, m_1, m_2\rangle = N \sum_{m'_1, m'_2} |\vec{p}_1, m'_1\rangle \otimes |\vec{p}_2, m'_2\rangle \cdot \\ &\cdot D_{m'_1, m_1}^{j_1}(R_1) D_{m'_2, m_2}^{j_2}(R_2) , \end{aligned} \quad (1.64)$$

где N - нормировочный множитель, $R_1 = L_{p_1}^{-1} L_P L_k$, $R_2 = L_{p_2}^{-1} L_P L_{-k}$.

Рассмотрим еще один базис $|\vec{P}, k, L, S, J, m\rangle$, который будем называть моментным базисом:

$$|\vec{P}, k, L, S, J, m\rangle = U(L_{\vec{P}})|k, L, S, J, m\rangle, \quad (1.65)$$

где L - орбитальный момент двух частиц:

$$\vec{L} = i[\vec{k}, \frac{\partial}{\partial \vec{k}}],$$

S - спиновый момент:

$$\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2,$$

J - полный момент в системе центра масс двух свободных частиц:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}.$$

Вектор состояния (1.65) можно разложить по сферическим гармоникам (см., например, [129]):

$$|\vec{P}, k, m, J, L, S\rangle = \sum_{m_1, m_2, m_L, m_S} \int d^3\vec{k} |\vec{P}, \vec{k}, m\rangle Y_{Lm_L}(\hat{\vec{k}}) \cdot \langle s_1 m_1 s_2 m_2 | S m_S \rangle \langle L m_L S m_S | J m \rangle, \quad (1.66)$$

где $\hat{\vec{k}} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$, $Y_{Lm_L}(\hat{\vec{k}})$ - сферические функции.

В базисе (1.65) векторы состояния нормированы следующим образом:

$$\langle \vec{P}, k, m, J, L, S | \vec{P}', k', m', J', L', S' \rangle = N 2 P_0 \delta(\vec{P} - \vec{P}') 2\mu_{12}(k) \frac{1}{k^2} \delta(k - k') \cdot \delta_{m, m'} \delta_{J, J'} \delta_{L, L'} \delta_{S, S'}, \quad (1.67)$$

где $\mu_{12}(k)$ - приведенная релятивистская масса двух частиц, определяемая формулой:

$$\mu_{12}(k) = \frac{\tilde{p}_{10} \tilde{p}_{20}}{\tilde{p}_{10} + \tilde{p}_{20}}. \quad (1.68)$$

В дальнейшем, нам более удобно будет работать не с переменной k , а с инвариантной переменной:

$$s = P_\mu^2, \quad s' = P'_\mu^2. \quad (1.69)$$

Переменные s и s' имеют смысл квадрата инвариантной массы свободной двухчастичной системы в начальном и конечном состоянии. Найдем связь между k и \sqrt{s} исходя из того, что массу двухчастичной системы можно представить:

$$\sqrt{s} = \sqrt{M_1^2 + \vec{k}^2} + \sqrt{M_2^2 + \vec{k}^2}. \quad (1.70)$$

Возведем обе части (1.70) в квадрат:

$$s^2 = M_1^2 + M_2^2 + 2\vec{k}^2 + 2\sqrt{(M_1^2 + \vec{k}^2)(M_2^2 + \vec{k}^2)}. \quad (1.71)$$

Избавляясь от иррациональности, возводя левую и правую часть (1.71) еще раз в квадрат, получим после преобразований связь между \sqrt{s} и k :

$$k^2 = \frac{s^2 - 2s(M_1^2 + M_2^2) + (M_1^2 - M_2^2)^2}{4s} = \frac{\lambda(M_1^2, M_2^2, s)}{4s}, \quad (1.72)$$

где введено следующее обозначение:

$$\lambda(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab + ac + bc). \quad (1.73)$$

Кроме того, связь между \sqrt{s} и k можно записать в виде:

$$2\mu_{12}(k) \frac{1}{k^2} \delta(k - k') = 2 \frac{1}{k} \delta(\sqrt{s} - \sqrt{s'}). \quad (1.74)$$

Тогда, используя соотношение:

$$\frac{\partial \sqrt{s}}{\partial k} = \frac{k \sqrt{s}}{p_{10} \tilde{p}_{20}}, \quad (1.75)$$

перепишем (1.65), (1.67) в виде:

$$|\vec{P}, \sqrt{s}, L, S, J, m\rangle, \quad (1.76)$$

$$\begin{aligned} & \langle \vec{P}, \sqrt{s}, m, J, L, S | \vec{P}', \sqrt{s'}, m', J', L', S' \rangle = \\ & = N \cdot 4P_0 \delta(\vec{P} - \vec{P}') \frac{1}{k} \delta(\sqrt{s} - \sqrt{s'}) \cdot \delta_{m,m'} \delta_{JJ'} \delta_{LL'} \delta_{SS'}, \end{aligned} \quad (1.77)$$

где N - нормировочная константа, имеющая следующий вид:

$$N = \frac{2P_0}{8k\sqrt{s}}, \quad k = \frac{\sqrt{\lambda(s, M_1^2, M_2^2)}}{2\sqrt{s}}. \quad (1.78)$$

Введенный в данном пункте моментный базис будет использоваться в последующих главах диссертации.

1.5 Построение матричного элемента электрослабого тока, диагонального по полному угловому моменту

Ядром нашего подхода к построению оператора электрослабого тока является так называемая процедура канонической параметризации матричных элементов локальных операторов [62]. С теоретико-групповой точки зрения данная процедура параметризации представляет собой, фактически реализацию известной теоремы Вигнера-Эккарта (см., например, [130, 131, 132]) на группе Пуанкаре. Данная процедура позволяет выделить из матричного элемента оператора любой тензорной размерности приведенные матричные элементы - формфакторы, которые являются инвариантами при преобразованиях из группы Пуанкаре.

Матричный элемент оператора представляется при этом суммой слагаемых, каждое из которых является произведением ковариантного и инвариантного членов. Ковариантная часть такого представления матричного элемента описывает его трансформационные (геометрические) свойства, а вся динамическая информация о переходе, описываемом данным оператором, содержится в инвариантной части - приведенных матричных элементах или формфакторах.

При экспериментальном изучении структуры частиц в процессах рассеяния объектами измерения являются, как правило, формфакторы - лоренц-инвариантные функции, через которые выражаются соответствующие сечения рассеяния, и которые входят в матричные элементы соответствующих токов переходов. В связи с этим именно формфакторы являются основным объектом вычислений при теоретическом описании структуры частиц.

Обсудим методику параметризации матричных элементов локальных операторов. Отметим, что в данном параграфе будут рассмотрены матричные элементы диагональные по полному угловому моменту. Основная идея параметризации может быть сформулирована следующим образом. Из переменных, от которых зависят векторы гильбертова пространства в обкладках оператора, необходимо построить объекты двух типов:

1. Набор линейно независимых матриц по проекциям спина в начальном и конечном состояниях. Набор этих матриц представляет

собой одновременно набор линейно независимых лоренцевских скаляров (скаляров и псевдоскаляров). Представленный набор описывает матричные элементы тока недиагональные по проекциям спина в начальном и конечном состояниях, а также поведение матричного элемента при дискретных преобразованиях пространства-времени.

2. Набор линейно независимых объектов, имеющих такую же тензорную размерность, как и оператор (это может быть, например, 4-вектор или 4-тензор некоторого ранга). Этот набор описывает поведение матричного элемента при преобразованиях Лоренца. Если оператор является лоренцевским скаляром, то данный набор совпадает с первым. Матричный элемент оператора записывается в виде некоторой суммы всех возможных произведений объектов первого типа на объекты второго типа. Коэффициенты при элементах этой суммы и будут искомыми приведенными матричными элементами - формфакторами. Получившаяся линейная комбинация модифицируется при наложении дополнительных условий на оператор тока, например, законов сохранения. Для соблюдения этих дополнительных условий в некоторых случаях часть коэффициентов разложения - формфакторов приходится полагать равными нулю.

Перейдем к изложению методики построения матричного элемента тока, диагонального по полному угловому моменту в каноническом базисе, используя мгновенную форму РКМ. Данная методика была с успехом применена к описанию электрослабых свойств таких составных систем, как пион, дейтрон, ρ -мезон (см., например, [63]).

Сначала рассмотрим параметризацию матричного элемента тока одной частицы [63].

Параметризация матричного элемента электрослабого тока одной частицы

Вектор состояния одной свободной частицы в мгновенной форме РКМ запишем в виде (1.55).

Для параметризации матричного элемента из переменных, от которых зависит вектор состояния (1.55), необходимо построить набор величин соответствующей тензорной размерности. Из имеющихся переменных в векторах состояния можно образовать один псевдовектор $\Gamma^\mu(p')$ и три

независимых вектора:

$$K'_\mu = (p + p')_\mu, \quad K_\mu = (p - p')_\mu, \quad R_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} p^\nu p'^\lambda \Gamma^\rho(p'), \quad (1.79)$$

где $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ - антисимметричный тензор четвертого ранга, $\Gamma^\rho(p')$ - оператор релятивистского спина [133]:

$$\Gamma^0(p) = (\vec{p}\vec{j}), \quad \vec{\Gamma}(p) = M\vec{j} + \frac{\vec{p}(\vec{p}\vec{j})}{p_0 + M}, \quad \Gamma^2 = -M^2 j(j+1). \quad (1.80)$$

Матричный элемент оператора тока будет выражаться через матричные элементы величин (1.79), (1.80). При этом каждый такой объект должен быть умножен на сумму линейно независимых матриц по проекциям спина в начальном и конечном состояниях, которые образуют набор линейно независимых лоренцевских скаляров и псевдоскаляров.

Эти линейно независимые инвариантные матрицы строятся из векторов p_μ и $\Gamma_\mu(p')$ [62]:

$$D^j(p, p')(p_\mu \Gamma^\mu(p'))^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, 2j, \quad (1.81)$$

где $D^j(p, p')$ - матрица Вигнера, возникающая вследствие того, что спин частицы при переходе из одной инерциальной системы в другую преобразуется по малой группе изоморфной группе вращений. При четном n матрица будет скаляром, при нечетном – псевдоскаляром.

Таким образом, параметризация матричного элемента одночастичного тока имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}, j, m | j_\mu^0(0) | \vec{p}', j, m' \rangle = \sum_{m''} D_{m, m''}^j(p, p') \langle m'' | F_1 K'_\mu + F_2 \Gamma_\mu(p') + \\ + F_3 R_\mu + F_4 K_\mu | m' \rangle, \end{aligned} \quad (1.82)$$

$$F_i = \sum_{n=0}^{2j} f_{in}(Q^2) (ip_\mu \Gamma^\mu(p'))^n, \quad (1.83)$$

где $Q^2 = -(p - p')^2$ - квадрат переданного импульса.

Наложим на матричный элемент (1.82) ряд дополнительных условий:

1. Потребуем, чтобы оператор был самосопряжен. Проверку этого условия можно осуществить, используя равенство:

$$p'_\mu \Gamma^\mu(p) D^j(p, p') = -D^j(p, p') p_\mu \Gamma^\mu(p'), \quad (1.84)$$

Проверка условия самосопряженности в правой части (1.82) для члена, содержащего F_2 при $n = 0$ приводит к необходимости несколько модифицировать вектор при F_2 . Новый вектор будет линейной комбинацией уже введенных в (1.82) 4-векторов и имеет следующий вид:

$$\Gamma^\mu(p') \rightarrow \Gamma^\mu(p') - \frac{K'^\mu}{K'^2} (p_\mu \Gamma^\mu(p')) . \quad (1.85)$$

Проверка условия самосопряженности для членов, содержащих F_2 и F_3 при $n \neq 0$, делает необходимым еще одну модификацию этих членов. Они должны видоизменяться следующим образом:

$$F_i A^\mu \rightarrow \frac{1}{2} (F_i A^\mu + A^\mu F_i) = [F_i A^\mu]_+ , i = 2, 3 , \quad (1.86)$$

здесь A^μ - соответствующие векторы в (1.82). Проверка самосопряженности членов, содержащих F_3 и F_4 приводит к необходимости домножить их на мнимую единицу.

2. Для удобства использования параметризации наложим условие, чтобы векторы при F_i были ортогональны друг другу. Это приведет еще к одной модификации вектора при F_2 . Он примет следующий окончательный вид:

$$\Gamma^\mu(p') - \left(\frac{K'^\mu}{K'^2} + \frac{K^\mu}{K^2} \right) (p_\mu \Gamma^\mu(p')) . \quad (1.87)$$

3. Наложим на оператор условие сохранения четности. Суммирование в (1.83) ограничено тем, что каждое слагаемое в правой части (1.82) содержит линейно независимые члены только при условии наличия не более $2j$ сомножителей Γ^μ . Слагаемое, содержащее большее число сомножителей Γ^μ сводится к слагаемым с числом сомножителей $\leq 2j$. При наложении условия сохранения четности суммирование в (1.83) будет ограничено также тем, что все слагаемые должны содержать только четное число псевдовекторных множителей Γ^μ . Таким образом, суммирование в F_1 и F_4 происходит по четным n : $2j \geq n \geq 0$, в F_3 по четным n : $2j - 1 \geq n \geq 0$, а в F_2 по нечетным n : $2j \geq n \geq 0$.

4. Наложим на оператор условие сохранения тока, т.е. $j_\mu K^\mu = 0$. Легко заметить, что это условие будет выполняться только при $F_4 = 0$.

Таким образом, при дополнительных условиях самосопряженности, сохранения четности, сохранения тока, а также взаимной

ортогональности векторов, параметризация матричного элемента (1.82) принимает форму:

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}, j, m | j_\mu^0(0) | \vec{p}', j, m' \rangle &= \sum_{m''} D_{m, m''}^j(p, p') \langle m'' | F_1 K'_\mu + \\ &+ \left[F_2 [\Gamma_\mu(p') - (p_\mu \Gamma^\mu(p')) \left(\frac{K_\mu}{K^2} + \frac{K'_\mu}{K'^2} \right)] \right]_+ + i [F_3 R_\mu]_+ | m' \rangle, \end{aligned} \quad (1.88)$$

где выражение $[...]_+$ означает симметризацию по штрихованным и нештрихованным переменным.

Для частиц спина 1/2 параметризация (1.88) приводится к выражению:

$$\langle \vec{p}, m | j_\mu^0(0) | \vec{p}', m' \rangle = \sum_{m''} D_{m, m''}^{1/2}(p, p') \langle m'' | [f_{10}(Q^2) K_\mu + i f_{30}(Q^2) R_\mu] | m' \rangle, \quad (1.89)$$

здесь $f_{10}(Q^2)$ и $f_{30}(Q^2)$ имеют смысл электрического и магнитного формфакторов частицы, которые связаны с соответствующими саксовскими формфакторами $G_E(Q^2)$ и $G_M(Q^2)$ [134]:

$$f_{10}(Q^2) = \frac{2M}{\sqrt{4M^2 + Q^2}} G_E(Q^2), \quad f_{30}(Q^2) = -\frac{4}{M\sqrt{4M^2 + Q^2}} G_M(Q^2). \quad (1.90)$$

Параметризация матричного элемента электрослабого тока свободной двухчастичной системы

Перейдем теперь к рассмотрению двухчастичной системы без взаимодействия. Для описания этой системы можно ввести два базиса (1.60), (1.76).

Базисы (1.60) и (1.76) связаны между собой разложением Клебша-Гордана для группы Пуанкаре:

$$\begin{aligned} |\vec{P}, \sqrt{s}, J, L, S, m\rangle &= \sum_{m_1, m_2} \int \frac{d^3 \vec{p}_1}{2p_{10}} \frac{d^3 \vec{p}_2}{2p_{20}} |\vec{p}_1, m_1; \vec{p}_2, m_2\rangle \cdot \\ &\cdot \langle \vec{p}_1, m_1; \vec{p}_2, m_2 | \vec{P}, \sqrt{s}, J, L, S, m \rangle, \end{aligned} \quad (1.91)$$

где

$$\begin{aligned}
& \langle \vec{p}_1, m_1; \vec{p}_2, m_2 | \vec{P}, \sqrt{s}, J, L, S, m \rangle = 2\sqrt{s}[\lambda(s, M_1^2, M_2^2)]^{-1/2} \cdot \\
& \cdot 2P_0 \delta(P - p_1 - p_2) \sum_{\tilde{m}_1, \tilde{m}_2} D_{\tilde{m}_1 \tilde{m}_1}^{1/2}(p_1, P) D_{\tilde{m}_2 \tilde{m}_2}^{1/2}(p_2, P) \langle 1/2\tilde{m}_1 1/2\tilde{m}_2 | S m_S \rangle \cdot \\
& \cdot Y_{L m_L}(\vartheta, \varphi) \langle S L m_S m_L | J m \rangle, \tag{1.92}
\end{aligned}$$

M_1 и M_2 – массы конститuentов, $Y_{L m_L}$ – сферические функции.

В выражении (1.92) разложение по сферическим гармоникам и суммирование по угловым моментам осуществляется в СЦИ и результат затем "сдвигается" в произвольную систему посредством D - функций Вигнера.

Проводя рассуждения, аналогичные использованным при параметризации матричного элемента одночастичного тока, получим выражение для параметризации матричного элемента тока двухчастичной системы в базисе (1.76):

$$\begin{aligned}
& \langle \vec{P}, \sqrt{s}, J, L, S, m | j_\mu^0(0) | \vec{P}', \sqrt{s'}, J, L', S', m' \rangle = \\
& = \sum_{m''} D_{m, m''}^J(P, P') \langle m'' | \sum_{k=1}^3 \{ F_k^{LL'SS'} A_\mu^k(s, Q^2, s') \}_+ | m' \rangle, \tag{1.93}
\end{aligned}$$

где $Q^2 = -(P - P')^2$, A_μ^k - функции, отвечающие за трансформационные свойства матричного элемента (см., например, [63]).

Обратим внимание, что в выражении (1.93) приведенные матричные элементы - инвариантные формфакторы зависят от дополнительных величин L, L', S, S' - инвариантных параметров вырождения в базисе (1.76). Инвариантные функции в (1.93) выражаются через электрические формфакторы следующим образом:

$$F_k^{LL'SS'} = \sum_{n=0}^{2J} f_{kn}^{LL'SS'}(s, Q^2, s') (iP_\mu \Gamma^\mu(P'))^n. \tag{1.94}$$

Глава 2

Константа лептонного распада и среднеквадратичный радиус ρ -мезона

2.1 Параметризация матричного элемента электрослабого тока, недиагонального по полному угловому моменту

Методика диагональной параметризации, изложенная в первой главе диссертации, не может быть применена, например, к описанию лептонных распадов векторных мезонов, поскольку в соответствующем матричном элементе собственные моменты J, J' в начальном и конечном состояниях различны, что исключает возможность построения оператора релятивистского спина Γ_μ . В связи с этим, необходимо разработать новую методику параметризации для описания такого рода процессов.

Рассмотрим сначала параметризацию матричного элемента тока, недиагонального по полному угловому моменту для системы двух невзаимодействующих частиц в базисе (1.76):

$$\langle \vec{P}, \sqrt{s}, J, L, S, m | j_\mu^0(0) | \vec{P}', \sqrt{s'}, J', L', S', m' \rangle . \quad (2.1)$$

В матричном элементе (2.1) собственные моменты J и J' различны, что делает невозможным использование методики параметризации, рассмотренной в первой главе диссертации.

Для инвариантной параметризации матричного элемента (2.1) совершим преобразование Лоренца из исходной (лабораторной) системы координат в систему Брейта [135]:

$$\tilde{j}^\mu = \Lambda_\nu^\mu j^\nu , \quad (2.2)$$

где \tilde{j}^μ -4-вектор оператора электромагнитного тока в БС, Λ_ν^μ - матрица преобразования Лоренца из ЛС в БС, имеющая вид:

$$\Lambda_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + \frac{2}{\sqrt{K'^2}} \tilde{K}'^\mu K'_\nu - \frac{(\tilde{K}'^\mu + K'^\mu)(\tilde{K}'_\nu + K'_\nu)}{K'^2 + \tilde{K}'^\lambda K'_\lambda}, \quad (2.3)$$

$$\tilde{K}' = (\sqrt{K'^2}, \vec{0}), \quad K'^\mu = (K'^0, \vec{K}'), \quad w_\mu = K'_\mu / \sqrt{K'^2}, \quad (2.4)$$

где $w_\mu = K'_\mu / \sqrt{K'^2}$ - 4-скорость, соответствующая указанному преобразованию.

Подставив (2.3) в (2.2), получим преобразование компонент 4-вектора тока из ЛС в БС. Отдельно запишем нулевую и трехмерные компоненты \tilde{j}^μ :

$$\begin{aligned} \tilde{j}^0_0 &= j^0_0 + \frac{2}{\sqrt{K'^2}} (K'^\nu j^{0\nu}) - \frac{\sqrt{K'^2} + K'^0}{K'^2 + \sqrt{K'^2} K'^0} \sqrt{K'^2} j^0_0 - \\ &\quad - \frac{\sqrt{K'^2} + K'_0}{K'^2 + \sqrt{K'^2} K'_0} (K'^\nu j^{0\nu}), \\ \vec{\tilde{j}}^0 &= \vec{j}^0 + \frac{\vec{K}'}{K'^2 + \sqrt{K'^2} K'_0} \sqrt{K'^2} j^0_0 - \frac{\vec{K}'}{K'^2 + \sqrt{K'^2} K'_0} (K'_\nu j^{0\nu}). \end{aligned} \quad (2.5)$$

С учетом (2.4) выражение (2.5) можно представить в виде:

$$\vec{\tilde{j}} = \vec{j} + \frac{\vec{w}(\vec{j} \vec{w})}{1 + w_0} - \vec{w} j^0_0, \quad \tilde{j}^0_0 = j^0_0 w_0 - (\vec{j}^0 \vec{w}) = j^0_\mu w^\mu. \quad (2.6)$$

Связь между матричными элементами токов в ЛС (2.1) и БС имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \langle \vec{P}, \sqrt{s}, J, L, S, m | j^0_\mu(0) | \vec{P}', \sqrt{s'}, J', L', S', m' \rangle &= \sum_{\tilde{m}, \tilde{m}'} D_{m, \tilde{m}}^J(P, w) \cdot \\ \cdot \langle \vec{P}, \sqrt{s}, J, L, S, \tilde{m} | \tilde{j}^0_\mu(0) | \vec{P}', \sqrt{s'}, J', L', S', \tilde{m}' \rangle D_{\tilde{m}', \tilde{m}}^{*J'}(P', w), \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\tilde{P} = (\tilde{P}_0, \vec{q}), \quad \tilde{P}' = (\tilde{P}'_0, -\vec{q}), \quad \tilde{P}_0 = \sqrt{s + \vec{q}^2}, \quad \tilde{P}'_0 = \sqrt{s' + \vec{q}^2}, \quad (2.8)$$

\vec{q} - трехмерный вектор, модуль которого вычисляется по формуле:

$$q = \sqrt{\lambda(M_1^2, M_2^2, Q^2) / [8(M_1^2 + M_2^2) + 4Q^2]}.$$

Как видно из (2.6), нулевая компонента оператора \tilde{j}_0^0 в БС имеет структуру скалярного оператора или сферического тензорного оператора нулевого ранга. Описание оператора тока в терминах тензорных операторов необходимо в силу того, что в дальнейшем будем использовать теорему Вигнера-Эккарта. Разложим нулевую компоненту матричного элемента оператора тока в БС в (2.7) по сферическим углам вектора \vec{q} :

$$\langle \vec{P}, \sqrt{s}, J, L, S, m | j_0^0(0) | \vec{P}', \sqrt{s'}, J', L', S', m' \rangle = \sum_{\tilde{m}, \tilde{m}', l', k'} D_{m, \tilde{m}}^J(P, w) \cdot Y_{l'k'}(\vec{q}) \langle J, \tilde{m} | C_{k'}^{l'}(s, Q^2, s') | J', \tilde{m}' \rangle D_{m', \tilde{m}'}^{*J'}(P', w), \quad (2.9)$$

$C_{k'}^{l'}$ - тензорный оператор ранга l' , $k' = -l', -(l' - 1), \dots, (l' - 1), l'$.

Произведем разложение Вигнера-Эккарта:

$$\langle J, \tilde{m} | C_{k'}^{l'}(s, Q^2, s') | J', \tilde{m}' \rangle = \langle J', \tilde{m}' l' k' | J, \tilde{m} \rangle G_{JJ'}^{0l'}(s, Q^2, s'), \quad (2.10)$$

где $G_{JJ'}^{0l'}(s, Q^2, s')$ представляет собой набор неприводимых матричных элементов - скаляров или свободных электромагнитных формфакторов.

В результате получаем параметризацию нулевой компоненты матричного элемента оператора тока в лабораторной системе:

$$\langle \vec{P}, \sqrt{s}, J, L, S, m | j_0^0(0) | \vec{P}', \sqrt{s'}, J', L', S', m' \rangle = \sum_{\tilde{m}', \tilde{m}, l', k'} D_{m, \tilde{m}}^J(P, w) \cdot \langle J', \tilde{m}' l' k' | J, \tilde{m} \rangle D_{m', \tilde{m}'}^{*J'}(P', w) Y_{l'k'}(\vec{q}) G_{JJ'}^{0l'}(s, Q^2, s'). \quad (2.11)$$

Перейдем теперь к рассмотрению трехмерной части матричного элемента оператора тока:

$$\langle \vec{P}, \sqrt{s}, J, L, S, m | j_r^0(0) | \vec{P}', \sqrt{s'}, J', L', S', m' \rangle, \quad r = 1, 2, 3. \quad (2.12)$$

Нулевую компоненту оператора тока в БС мы рассматривали как тензорный оператор нулевого ранга. Трехмерную часть оператора можно описать в терминах тензорного оператора первого ранга. Для этого достаточно перейти к каноническому базису, т.е от декартовых компонент тока к базису сферических гармоник [136]:

$$\tilde{j}_r^0(0) = a_{rt} \tilde{j}_t^{01}(0), \quad t = -1, 0, 1, \quad (2.13)$$

$$a_{rt} = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ i & 0 & i \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

$\tilde{j}_t^{01}(0)$ - компоненты сферического тензорного оператора первого ранга. Разложим матричный элемент, содержащийся в правой части (2.13), по сферическим углам вектора \vec{q} в БС:

$$\begin{aligned} & \langle \vec{P}, \sqrt{s}, J, L, S, \tilde{m} | \tilde{j}_t^{01}(0) | \vec{P}', \sqrt{s'}, J', L', S', \tilde{m}' \rangle = \\ & = \sum_{l,k} Y_{lk}(\vec{q}) \langle J, \tilde{m} | B_{t,k}^{1,l}(s, Q^2, s') | J', \tilde{m}' \rangle . \end{aligned} \quad (2.15)$$

В лабораторной системе матричный элемент тензорного оператора первого ранга будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} & \langle \vec{P}, \sqrt{s}, J, L, S, m | j_t^{01}(0) | \vec{P}', \sqrt{s'}, J', L', S', m' \rangle = \sum_{\tilde{m}, \tilde{m}', l, k} D_{m, \tilde{m}}^J(P, w) \cdot \\ & \cdot Y_{lk}(\vec{q}) \langle J, \tilde{m} | B_{t,k}^{1,l}(s, Q^2, s') | J', \tilde{m}' \rangle D_{m', \tilde{m}'}^{*J'}(P', w) , \end{aligned} \quad (2.16)$$

здесь $B_{t,k}^{1,l}$ - тензорный оператор, преобразующийся при вращениях по прямому произведению представлений $D^1 \otimes D^l$.

При помощи разложения Клебша-Гордана приведем оператор к виду, преобразующемуся по представлению D^j :

$$\langle J, \tilde{m} | B_{t,k}^{1,l} | J', \tilde{m}' \rangle = \sum_{j,n} \langle 1 \ t \ l \ k | j \ n \rangle \langle J, \tilde{m} | B_{t,k,n}^{1,l,j}(s, Q^2, s') | J', \tilde{m}' \rangle . \quad (2.17)$$

Подставляя (2.17) в (2.16), получим:

$$\begin{aligned} & \langle \vec{P}, \sqrt{s}, J, L, S, m | j_t^{01}(0) | \vec{P}', \sqrt{s'}, J', L', S', m' \rangle = \sum_{\tilde{m}, \tilde{m}', l, k, j, n} D_{m, \tilde{m}}^J(P, w) \cdot \\ & \cdot Y_{lk}(\vec{q}) \langle 1 \ t \ l \ k | j \ n \rangle \langle J, \tilde{m} | B_{t,k,n}^{1,l,j}(s, Q^2, s') | J', \tilde{m}' \rangle D_{m', \tilde{m}'}^{*J'}(P', w) . \end{aligned} \quad (2.18)$$

Для выделения инвариантной части из матричного элемента тензорного оператора в (2.18) воспользуемся теоремой Вигнера-Эккарта:

$$\langle J, \tilde{m} | B_{t,k,n}^{1,l,j}(s, Q^2, s') | J', \tilde{m}' \rangle = \langle J', \tilde{m}' | j \ n | J, \tilde{m} \rangle G_{JJ'}^{1lj}(s, Q^2, s') , \quad (2.19)$$

где $G_{JJ'}^{1lj}(s, Q^2, s')$ - набор приведенных матричных элементов - скалярных функций или свободных формфакторов.

В результате подстановки (2.19) в (2.18) придем к следующей параметризации трехмерной части матричного элемента в правой части

(2.13):

$$\begin{aligned} \langle \vec{P}, \sqrt{s}, J, L, S, m | j_{t}^{01}(0) | \vec{P}', \sqrt{s'}, J', L', S', m' \rangle &= \sum_{\tilde{m}', \tilde{m}, l, k, j, n} D_{m, \tilde{m}}^J(P, w) \cdot \\ \cdot \langle J' \tilde{m}' j n | J \tilde{m} \rangle \langle 1 t l k | j n \rangle D_{m', \tilde{m}'}^{J'}(P', w) Y_{lk}(\vec{q}) G_{JJ'}^{1lj}(s, Q^2, s') . \end{aligned} \quad (2.20)$$

В качестве иллюстрации развитой методики параметризации проведем вычисления константы лептонного распада ρ -мезона.

2.2 Константа лептонного распада ρ -мезона

Постоянная лептонного распада ρ -мезона f_ρ определяется следующим матричным элементом электрослабого тока (см., например, [79]):

$$\langle 0 | j_\mu^\rho(0) | \vec{P}_\rho, m_\rho \rangle = i\sqrt{2} f_\rho \xi_\mu(m_\rho) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} , \quad (2.21)$$

где \vec{P}_ρ - 3-импульс мезона, $m_\rho = -1, 0, 1$ - проекция спина, $\xi_\mu(m_\rho)$ - вектор поляризации, имеющий в системе Брейта следующий вид:

$$\xi_\mu(\pm 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, \mp 1, -i, 0) , \quad \xi_\mu(0) = (0, 0, 0, 1) . \quad (2.22)$$

Получим в рамках развитого варианта мгновенной формы РКМ (см., например, [60, 61, 63, 69]) выражение постоянной лептонного распада через волновую функцию мезона как двухкварковой составной системы. Для решения этой задачи, во-первых, необходимо разложить матричный элемент в (2.21) по некоторому базису, который определяет представление для волновой функции, и, во-вторых, выделить из получившегося выражения инвариантную часть, т.е. провести процедуру параметризации матричного элемента (2.21). Заметим, что представление тока (2.21), в котором выделена инвариантная часть f_ρ , является частным случаем параметризации, однако мы будем использовать более универсальную процедуру, предложенную в предыдущем параграфе главы.

Вычисление константы лептонного распада в (2.21) будет производиться в приближении 4-х фермионного взаимодействия. В связи с этим необходимо рассмотреть матричный элемент электрослабого тока

распада j_μ^0 системы из двух свободных фермионов. Будем работать в базисе (1.76):

$$\langle 0 | j_\mu^0(0) | \vec{P}, \sqrt{s}, J, L, S, m \rangle . \quad (2.23)$$

Поскольку данный параграф посвящен описанию ρ -мезона, то в дальнейшем будем рассматривать только векторные мезоны с нулевым орбитальным моментом относительного движения кварков, т.е. будем полагать $J = S = 1, L = 0$ и опускать соответствующие переменные в векторах состояний базиса (1.76).

Проведем процедуру релятивистки инвариантной параметризации матричного элемента (2.23). Произведем преобразование Лоренца из исходной (лабораторной) системы координат в БС (см.(2.6)).

В случае матричного элемента (2.23) система БС совпадает с системой СЦИ, в которой $\vec{P} = 0$, поэтому связь между матричными элементами в системах отсчета имеет простой вид:

$$\langle 0 | j_\mu^0(0) | \vec{P}, \sqrt{s}, m \rangle = \langle 0 | \tilde{j}_\mu^0(0) | \sqrt{s}, m \rangle . \quad (2.24)$$

Перейдем к рассмотрению нулевой компоненты матричного элемента (2.23). В соответствии с (2.11) матричный элемент нулевой компоненты запишется в виде:

$$\begin{aligned} \langle 0 | j_0^0(0) | \vec{P}, \sqrt{s}, m \rangle &= \langle 0 | \tilde{j}_0^0(0) | \sqrt{s}, m \rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \langle 0 | C_0^0(s) | m \rangle , \end{aligned} \quad (2.25)$$

C_0^0 - сферический тензорный оператор нулевого ранга.

Если применить к этому сферическому тензорному оператору разложение Вигнера-Эккарта, получим, что его матричный элемент равен нулю:

$$\langle 0 | C_0^0(s) | m \rangle = \langle 1 m 0 0 | 0 0 \rangle G_{01}^{00}(s) = 0 . \quad (2.26)$$

Рассмотрим теперь трехмерную часть матричного элемента оператора тока (2.24):

$$\langle 0 | j_r^0(0) | \vec{P}, \sqrt{s}, m \rangle, \quad r = 1, 2, 3 . \quad (2.27)$$

Нулевую компоненту оператора тока в БС (2.24) мы интерпретировали как тензорный оператор нулевого ранга. Трехмерную часть оператора можно записать с учетом (2.13)–(2.14) следующим образом:

$$\langle 0 | j_t^{01}(0) | \vec{P}, \sqrt{s}, m \rangle = \langle 0 | \tilde{j}_t^{01}(0) | \sqrt{s}, m \rangle =$$

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \langle 0 | B_{t,0}^{1,0}(s) | m \rangle , \quad (2.28)$$

где $B_{t,0}^{1,0}$ - сферический тензорный оператор, преобразующийся при вращениях по представлению D^1 .

Воспользуемся теоремой Вигнера-Эккарта:

$$\langle 0 | B_{t,0}^{1,0}(s) | m \rangle = \langle 1 m 1 t | 0 0 \rangle G_{01}^{101}(s) , \quad (2.29)$$

где $G_{01}^{101}(s)$ - набор приведенных матричных элементов – скалярных функций или свободных формфакторов.

В результате приходим к следующей параметризации трехмерной части матричного элемента тока (2.28):

$$\langle 0 | j_t^{01} | \vec{P}, \sqrt{s}, m \rangle = \langle 1 m 1 t | 0 0 \rangle \frac{1}{\sqrt{4\pi}} G_{01}^{101}(s) . \quad (2.30)$$

Найдем явный вид свободных формфакторов в (2.30). Для этого разложим матричный элемент (2.23) с указанными значениями квантовых чисел по базису (1.60):

$$\begin{aligned} \langle 0 | j_\mu^0(0) | \vec{P}, \sqrt{s}, m \rangle &= \sum_{m_1, m_2} \int \frac{d^3 \vec{p}_1}{2p_{10}} \frac{d^3 \vec{p}_2}{2p_{20}} \\ &\times \langle 0 | j_\mu^0(0) | \vec{p}_1, m_1; \vec{p}_2, m_2 \rangle \\ &\times \langle \vec{p}_1, m_1; \vec{p}_2, m_2 | \vec{P}, \sqrt{s}, m \rangle , \end{aligned} \quad (2.31)$$

где $\langle \vec{p}_1, m_1; \vec{p}_2, m_2 | \vec{P}, \sqrt{s}, m \rangle$ определен равенством (1.92).

Для матричного элемента тока распада в базисе индивидуальных импульсов и спинов используем стандартное выражение (см., например, [137]):

$$\begin{aligned} \langle 0 | j^{0\mu}(0) | \vec{p}_1, m_1; \vec{p}_2, m_2 \rangle &= \\ &= \bar{v}(\vec{p}_2, m_2) \gamma^\mu (1 + \gamma^5) u(\vec{p}_1, m_1) , \end{aligned} \quad (2.32)$$

$\gamma^\mu = (\gamma^0, \vec{\gamma})$ - матрицы Дирака; $\bar{v}(\vec{p}_2, m_2)$ и $u(\vec{p}_1, m_1)$ - дираковские спиноры.

Используя равенство (2.32), а также проводя интегрирование в (2.31) в БС, получаем явную формулу для свободных формфакторов:

$$G_{01}^{101}(s) =$$

$$\frac{3\sqrt{3}(\sqrt{s} + 2M)}{16\sqrt{s}\pi^2} \left(\frac{7s + 12M\sqrt{s} + 8M^2}{6s + 12M\sqrt{s} + 12M^2} \right). \quad (2.33)$$

Вернемся теперь к выражению (2.21). Разложим левую часть этой формулы по базису (1.76):

$$\begin{aligned} \langle 0 | j_{\mu}^{\rho}(0) | \vec{P}_{\rho}, m_{\rho} \rangle &= \sum_m \int \frac{d^3 \vec{P}}{N} d\sqrt{s} \langle 0 | j_{\mu}^{\rho}(0) | \vec{P}, \sqrt{s}, m \rangle \cdot \\ &\cdot \langle \vec{P}, \sqrt{s}, m | \vec{P}_{\rho}, m_{\rho} \rangle, \end{aligned} \quad (2.34)$$

где $\langle \vec{P}, \sqrt{s}, m | \vec{P}_{\rho}, m_{\rho} \rangle$ - волновая функция в смысле РКМ в представлении базиса (1.76):

$$\langle \vec{P}, \sqrt{s}, m | \vec{P}_{\rho}, m_{\rho} \rangle = N_{\rho} \delta(\vec{P} - \vec{P}_{\rho}) \delta_{m m_{\rho}} \varphi(s), \quad (2.35)$$

где

$$\begin{aligned} N_{\rho} &= \sqrt{2 P_{\rho 0}} \sqrt{\frac{N_{CG}}{4k}}, \quad N_{CG} = \frac{(2 P_0)^2}{8k\sqrt{s}}. \\ \varphi(s) &= \sqrt[4]{s} k \psi(k), \quad k = \frac{1}{2} \sqrt{s - 4M^2}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

$\psi(k)$ - удовлетворяет условию нормировки:

$$\int \psi^2(k) k^2 dk = 1. \quad (2.37)$$

Интеграл по трехмерному импульсу в (2.34) снимается за счет дельта-функции в волновой функции (2.35). Матричный элемент тока в оставшемся интеграле по инвариантной переменной \sqrt{s} в (2.34) необходимо рассматривать в развиваемом подходе как регулярную обобщенную функцию, заданную на пространстве основных функций $\varphi(s)$, т.е объект, имеющий смысл только под знаком интеграла. В этом случае для его параметризации можно использовать процедуру, которая была описана при получении формул (2.25), (2.30) с заменой в формуле (2.6) P_{μ} на $P_{\rho\mu}$. В результате получаем следующие выражения для матричных элементов электрослабого тока системы двух взаимодействующих частиц, аналогичные формулам (2.25), (2.30):

$$\begin{aligned} \frac{N_{\rho}}{N} \langle 0 | j_0^{\rho}(0) | \vec{P}_{\rho}, m_{\rho} \rangle &= 0, \\ \frac{N_{\rho}}{N} \langle 0 | j_t^{\rho 1}(0) | \vec{P}, \sqrt{s}, m \rangle &= \end{aligned}$$

$$\langle 1 m 1 t | 0 0 \rangle \frac{1}{\sqrt{4\pi}} H_{01}^{101}(s), \quad (2.38)$$

где $H_{01}^{101}(s)$ - набор приведенных матричных элементов – скалярных функций или формфакторов.

Подставляя (2.34), (2.35), (2.38) в (2.21), получаем интегральное представление для константы лептонного распада векторного мезона с нулевым орбитальным моментом относительного движения кварков:

$$f_\rho = \int d\sqrt{s} H_{01}^{101}(s) \varphi(s). \quad (2.39)$$

Далее необходимо учитывать выбор конкретного приближения для расчета. Как правило, для двухкомпонентных систем используют импульсное приближение (ИП), которое означает, что виртуальный γ -квант взаимодействует только с одной компонентой (а не с двумя сразу). В частности, естественное для составной модели импульсное приближение нарушает релятивистскую инвариантность теории. Чтобы обеспечить релятивистскую инвариантность, необходимо использовать модифицированное импульсное приближение (МИП).

По духу этот метод восходит к работе [138]. Следует заметить, что из этой же работы [138] выросло близкое направление, обоснованное в [139]. Он использует двойное интегральное представление по полной массе системы. Эти интегралы возникают в результате решений уравнений типа Мусхелишвили – Омнеса. Применение метода к расчету структуры конкретных двухкварковых систем может быть найдено, например, в [140, 141, 142].

Приближение 4-фермионного взаимодействия в развитом формализме формулируется релятивистски инвариантным образом путем замены инвариантного формфактора $H_{01}^{101}(s)$ в (2.39) на инвариантный свободный формфактор $G_{01}^{101}(s)$, который входит в параметризацию матричного элемента тока распада системы из двух свободных частиц (2.30):

$$f_\rho = \int d\sqrt{s} G_{01}^{101}(s) \varphi(s), \quad (2.40)$$

где свободный формфактор $G_{01}^{101}(s)$ задается формулой (2.33).

Формулу (2.40) для случая ρ -мезона можно переписать в общепринятой форме в терминах переменной k из равенства (2.36):

$$f_\rho = \frac{\sqrt{3}}{\pi\sqrt{2}} \int_0^\infty dk k^2 \psi(k) \frac{(\sqrt{k^2 + M^2} + M)}{(k^2 + M^2)^{3/4}} \times \left(1 + \frac{k^2}{3(\sqrt{k^2 + M^2} + M)^2} \right). \quad (2.41)$$

Заметим, что выражение (2.41) совпадает с соответствующими формулами в других подходах (см., например, [79, 80]), где расчеты проводились в динамике на световом фронте и в точечной форме динамики. Однако, например, полученные в развитом формализме формулы для электромагнитных формфакторов составных систем (см., например, [61], а также настоящую главу) отличаются от соответствующих формул в других подходах. Это объясняется, по нашему мнению, введенной нами формулировкой релятивистского импульсного приближения (т.н. модифицированное импульсное приближение - МИП), которое не нарушает закон сохранения тока и условий лоренц-ковариантности в отличие от обычной формулировки импульсного приближения, используемого в других подходах. Отметим также, что формула (2.41) в нерелятивистском случае переходит в стандартное выражение, в котором константа лептонного распада пропорциональна волновой функции в координатном представлении в точке $r = 0$.

2.3 Среднеквадратичный радиус ρ -мезона, определяемый из константы лептонного распада

Вычисление среднеквадратичного радиуса ρ -мезона

Представим некоторые аналитические выражения, необходимые для вычисления среднеквадратичного радиуса ρ -мезона. Среднеквадратичный радиус вычисляется по стандартной формуле:

$$\langle r_\rho^2 \rangle = -6 \left. \frac{dG_C(Q^2)}{dQ^2} \right|_{Q^2 \rightarrow 0}, \quad (2.42)$$

где $G_C(Q^2)$ - зарядовый формфактор ρ -мезона, для которого в работе

[60] получено следующее интегральное представление:

$$G_C(Q^2) = \int d\sqrt{s} d\sqrt{s'} \varphi(s) g_{0C}(s, Q^2, s') \varphi(s'). \quad (2.43)$$

Здесь g_{0C} – т.н. свободный зарядовый формфактор, описывающий электромагнитные свойства двухчастичной системы без взаимодействия с квантовыми числами ρ -мезона. Свободный формфактор имеет следующую структуру:

$$g_{0C}(s, Q^2, s') = A_1(s, Q^2, s')(G_E^u(Q^2) + G_E^{\bar{d}}(Q^2)) + \\ + A_2(s, Q^2, s')(G_M^u(Q^2) + G_M^{\bar{d}}(Q^2)) , \quad (2.44)$$

где $G_{E,M}^{u,\bar{d}}$ – электрический и магнитный формфакторы конститuentных u - и \bar{d} - кварков, соответственно. Явный вид функций $A_1(s, Q^2, s')$ и $A_2(s, Q^2, s')$ в силу громоздкости здесь не приводится и может быть найден в [60].

Электромагнитные формфакторы конститuentных кварков брались в виде, обеспечивающим совпадение асимптотики формфактора пиона при больших переданных импульсах в нашем подходе с предсказаниями КХД [63, 103, 124, 126]:

$$G_E^q(Q^2) = e_q f_q(Q^2) , \\ G_M^q(Q^2) = (e_q + \kappa_q) f_q(Q^2) , \quad (2.45)$$

где e_q - заряд кварка, κ_q -аномальный магнитный момент кварка в естественных единицах (см., например, [143]). Предсказания пертурбативной КХД для поведения формфакторов мезонов при больших Q^2 диктуют выбор формфактора кварка $f_q(Q^2)$ в виде [124]:

$$f_q(Q^2) = \frac{1}{1 + \ln(1 + \langle r_q^2 \rangle Q^2/6)} , \quad (2.46)$$

здесь $\langle r_q^2 \rangle$ значение среднеквадратичного радиуса конститuentного кварка [96]:

$$\langle r_q^2 \rangle \simeq 0.3/M^2 . \quad (2.47)$$

Фиксация параметров модели

Зафиксируем массу конститuentного кварка в (2.41), согласно работам [97], [123], [144]: $M = 0.22 \text{ GeV}$.

Единственным свободным параметром в (2.41) является параметр волновой функции b , определяемый взаимодействием кварков. Обсудим один из способов фиксации этого параметра на примере использования в (2.36) следующего набора волновых функций:

1. Волновая функция основного состояния гармонического осциллятора (см., например, [145]):

$$\psi(k) = \frac{2}{\pi^{1/4} b^{3/2}} \exp\left(-\frac{k^2}{2b^2}\right). \quad (2.48)$$

2. Волновая функция степенного типа (см., например, [105]):

$$\psi(k) = \sqrt{\frac{32}{\pi b^3}} (k^2/b^2 + 1)^{-2}. \quad (2.49)$$

$$\psi(k) = \sqrt{\frac{512}{7\pi b^3}} (k^2/b^2 + 1)^{-3}. \quad (2.50)$$

Проиллюстрируем данный метод фиксации параметра волновой функции b на примере (2.50). Построим график константы лептонного ρ -мезона f_ρ как функции свободного параметра b . Результат расчета представлен на нижней части графика (Рис. 2.1).

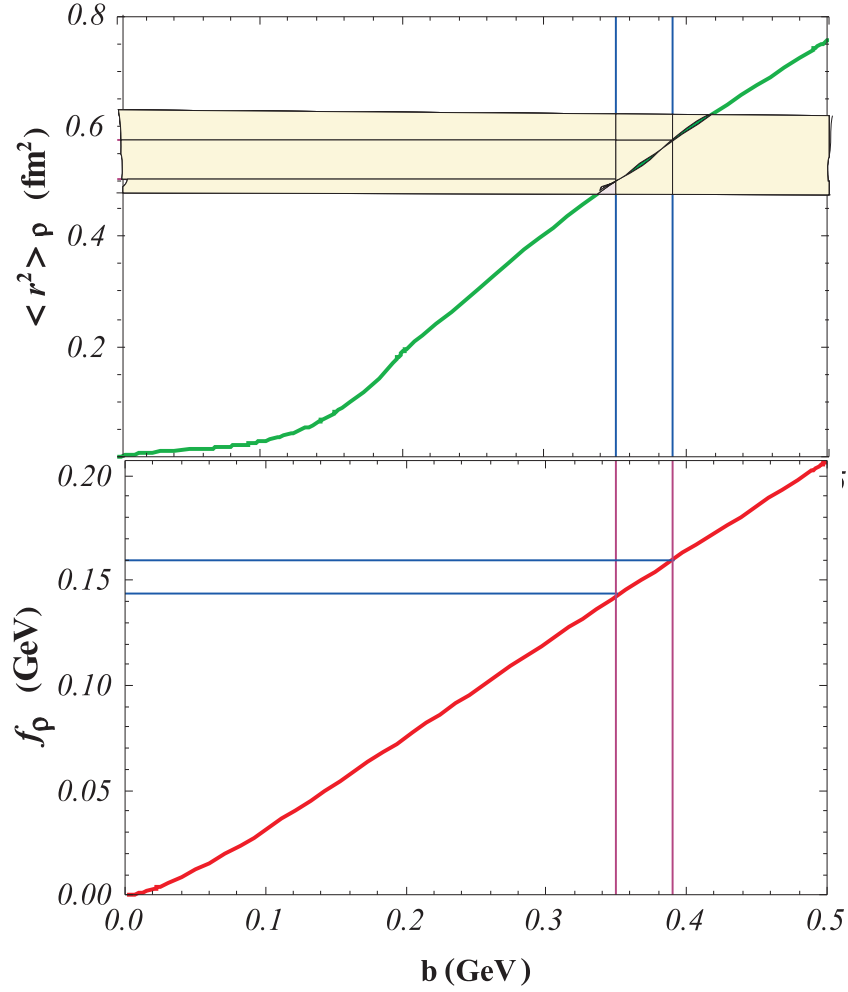


Рис. 2.1: Зависимость константы лептонного распада f_ρ и среднеквадратичного радиуса r_ρ^2 ρ -мезона от параметра b волновой функции (2.50).

Выделим на оси ординат отрезок значений f_ρ , равный экспериментально измеренному интервалу значений константы [21]:

$$f_\rho^{exp} = 152 \pm 8 \text{ MeV} . \quad (2.51)$$

В результате на оси абсцисс получаем отрезок значений параметра b , которые обеспечивают совпадение расчетных значений константы лептонного распада с экспериментом: $\Delta b = 0.35 \text{ GeV} \leq b \leq 0.39 \text{ GeV}$.

Используя формулы (2.42)–(2.47), построим теперь зарядовый радиус ρ -мезона $\langle r_\rho^2 \rangle$ как функцию свободного параметра b . Результаты расчета показаны в верхней части графика (Рис. 2.1).

В рамках указанного в нижней части графика интервала значений параметра b , проведем вычисления среднеквадратичного радиуса

ρ -мезона, используя (2.42). Результаты вычислений среднеквадратичного радиуса выделены на оси ординат и варьируются в интервале:

$$0.51 \text{ fm}^2 \leq \langle r_\rho^2 \rangle \leq 0.58 \text{ fm}^2 . \quad (2.52)$$

Важным результатом полученных расчетов (2.52) является автоматическое выполнение равенства, подтверждающее справедливость гипотезы Ву и Янга [81] относительно вида сечения упругого адрон-протонного рассеяния:

$$\langle r_\rho^2 \rangle - \langle r_\pi^2 \rangle = 0.11 \pm 0.06 \text{ fm}^2 . \quad (2.53)$$

Гипотеза Ву и Янга

В рамках гипотезы Ву и Янга сечение упругого адрон-протонного рассеяния предполагается пропорциональным произведению электромагнитных формфакторов протона и соответствующего адрона. Данная гипотеза хорошо подтверждена экспериментально для ряда адронов [83]. Следует отметить, что в работе [146] ставится под сомнение справедливость гипотезы Ву и Янга в области больших переданных импульсов, т.е. фактически устанавливаются пределы применимости гипотезы. Однако, в указанной в [146] области нарушения гипотезы само применение составной кварковой модели становится проблематичным, так что это ограничение не может повлиять на наши выводы.

Кроме того, в [146] отмечается, что полученный на основании этой гипотезы электромагнитный формфактор пиона во времени-подобной области хорошо описывает экспериментальные данные. Таким образом, справедливость гипотезы Ву и Янга в области применимости релятивистской составной кварковой модели можно считать хорошо установленной.

Следствием этой гипотезы является равенство зарядового и т.н. среднеквадратичного радиуса сильного взаимодействия адрона, который выражается через наклон сечений адрон-протонного, протон-протонного и протон-антипротонного рассеяния [83]:

$$\langle r_{st}^2 \rangle_h = \langle r_{ch}^2 \rangle_h , \quad (2.54)$$

где $\langle r_{ch}^2 \rangle_h$ - среднеквадратичный радиус адрона, $\langle r_{st}^2 \rangle_h$ - среднеквадратичный радиус сильного взаимодействия адрона.

Соотношение (2.54) может быть особенно полезно при описании адронов, имеющих малое время жизни, т.к. измерение электромагнитных характеристик для них является затруднительным. Это касается например, электромагнитных характеристик ρ -мезона.

Обсудим современный экспериментальный статус этой гипотезы. Как мы уже говорили, следствием этой гипотезы является равенство зарядового и т.н. среднеквадратичного радиуса сильного взаимодействия адрона (2.54).

Как видно из таблицы (2.1), данная гипотеза достаточно хорошо подтверждена экспериментально для протона, пиона и каона.

Таблица 2.1: Экспериментальные соотношения между сильными адронными $\langle r_{st}^2 \rangle$ и $\langle r_{ch}^2 \rangle$ среднеквадратичными радиусами пиона (π), каона (K), протона (p).

Адрон	$\langle r_{st}^2 \rangle, fm^2$	$\langle r_{ch}^2 \rangle, fm^2$
π	0.41 ± 0.02 [83]	0.45 ± 0.02 [85]
K	0.35 ± 0.02 [83]	0.31 ± 0.03 [21]
ρ	0.52 ± 0.05 [83]	—
p	0.69 ± 0.02 [147]	0.70706 ± 0.00065 [148]

Для большей наглядности приведем также Рис. 2.2, аналогичный рисунку из работы [83], отвечающий однако более современным экспериментальным данным.

Анализ экспериментальных данных из таблицы 2.1 позволяет получить формулу (2.53), связывающую зарядовые радиусы пиона и ρ -мезона.

Формула (2.53) является фактически следствием гипотезы Ву и Янга и является одним из критериев оценки адекватности составных кварковых моделей.

Из Рис. 2.1 видно, что при всех значениях параметра b , обеспечивающих совпадение расчетного значения константы f_ρ с экспериментом условие справедливости гипотезы Ву и Янга в нашем подходе выполняется автоматически. Или, другими словами, при одних и тех же параметрах модели в нашем подходе удастся одновременно описать экспериментальные значения константы лептонного распада ρ -мезона и значение среднеквадратичного радиуса ρ -мезона, следующего из гипотезы Ву и Янга (2.53). Такое же согласованное описание константы лептонного распада и среднеквадратичного радиуса ρ -мезона

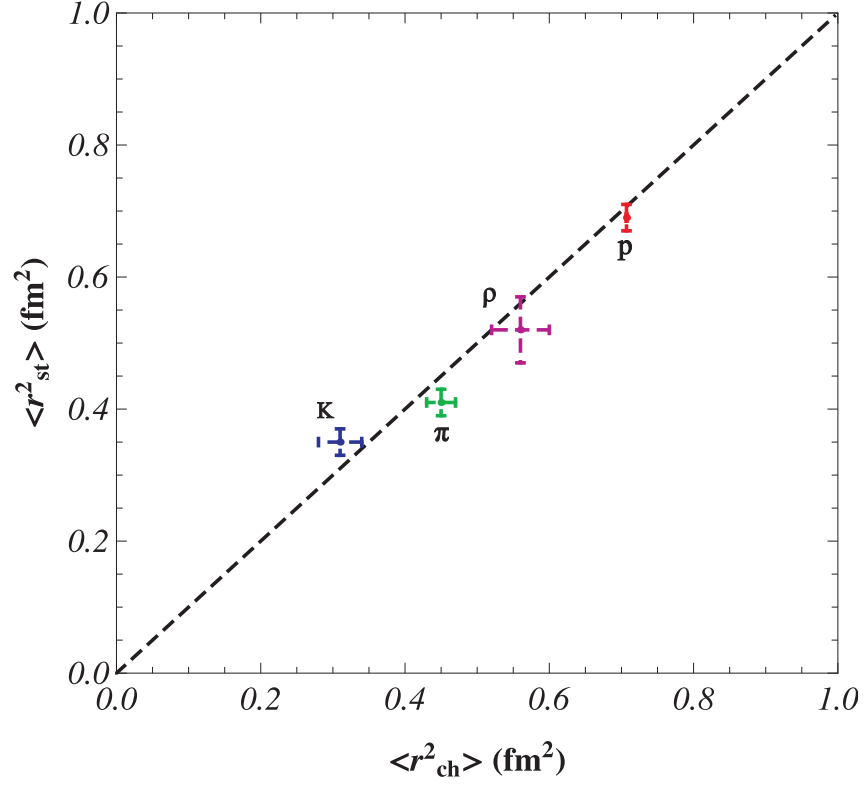


Рис. 2.2: Экспериментальные соотношения между сильными адронными $\langle r_{st}^2 \rangle$ и $\langle r_{ch}^2 \rangle$ среднеквадратичными радиусами пиона (π), каона (K), протона (p). Выделена область значений для сильного и среднеквадратичного радиуса ρ -мезона, полученного в диссертации.

удается получить и для других волновых функций (см., например, результаты расчетов для волновых функций (2.48)-(2.50) в таблице 2.2):

Таблица 2.2: Константа лептонного распада (2.41) с различными модельными волновыми функциями (2.48)-(2.50). Масса конstituентного кварка $M = 0.22 GeV$. Параметр b волновой функции фиксирован из соотношения (2.42) и условия (2.53).

Модель	b, GeV	f_ρ, MeV	$\langle r_\rho^2 \rangle, fm^2$
(2.48)	0.228	152.2	0.597
(2.49)	0.217	153.6	0.579
(2.50)	0.379	154.9	0.56

Обсудим еще одно возможное приближение, применяемое в составных моделях.

В работах [97, 149] при расчетах электрослабых характеристик ρ -мезона используются кварковые волновые функции, совпадающие с

волновыми функциями кварков в пионе, т.е. для волновой функции (2.50) предполагается равенство:

$$b_\rho = b_\pi . \quad (2.55)$$

С физической точки зрения равенство (2.55) означает пренебрежение в операторе взаимодействия кварков спин-спиновым взаимодействием, которое является разным в пионе и ρ -мезоне.

Обсудим результаты вычислений константы лептонного распада ρ -мезона при условии (2.55). Наши расчеты показывают, что такая фиксация параметра волновой функции дает далекие от эксперимента значения константы лептонного распада: $b = 0.6131 \text{ GeV}$, $f_\rho = 253 \text{ MeV}$ (см. 2.51).

Таким образом, приближение (2.55), используемое в работах [97, 149], является неудачным и не дает согласованного с экспериментом описания константы лептонного распада ρ -мезона.

В заключении главы обсудим теперь кратко результаты расчетов электрослабых свойств ρ -мезона в других подходах с точки зрения одновременного описания экспериментального значения константы лептонного распада и удовлетворения гипотезе Ву и Янга.

В таблице 2.3 представлены результаты сравнения наших расчетов с расчетами в других подходах.

Таблица 2.3: Сравнение результатов вычислений константы лептонного распада f_ρ и среднеквадратичного радиуса $\langle r_\rho^2 \rangle$ ρ - мезона в различных подходах.

Модель	f_ρ, MeV	$\langle r_\rho^2 \rangle, \text{fm}^2$
Наши результаты	152 ± 8	0.56 ± 0.04
[97]	—	0.35
[149]	133	—
[150]	134	0.296
[151]	154	0.268
[152]	146	0.54
[153]	130	0.312
[154]	—	0.655
[155]	—	0.67
[156]	—	0.49
[157]	147.4	—
[158]	—	0.67
[159]	—	0.33

Из таблицы 2.3 видно, что большая часть подходов, в рамках которых рассчитываются электрослабые свойства ρ -мезона, в отличие от развиваемого в настоящей диссертации подхода не дают удовлетворительное описание константы лептонного распада с одновременным удовлетворением условия Ву и Янга (2.53).

Глава 3

Описание радиационного распада

$$\rho \rightarrow \pi \gamma^*$$

3.1 Электрослабые свойства π - и ρ -мезонов и параметры СКМ

Экспериментальные данные последних лет вызвали новый интерес к теоретическому изучению электрослабых характеристик мезонов (см., например, [150]–[167]). Важным моментом при описании электрослабых свойств мезонов в релятивистской составной модели является зависимость результатов расчетов от параметров модели. Параметры составной кварковой модели условно можно разделить на два типа: к первому типу относятся параметры конститuentных кварков (масса, среднеквадратичный радиус, аномальный магнитный момент и т.д.); ко второму типу относятся параметры, входящие в волновые функции, поиск которых осуществляется, например, из решения вариационной задачи.

В качестве примера такого рода исследований можно привести работу [151], где для ρ -мезона проводился анализ зависимости среднеквадратичного радиуса, магнитного момента кварка от его массы. В результате вычислений выявлено уменьшение среднеквадратичного радиуса от роста массы кварка. На основании зависимости среднеквадратичного радиуса от массы кварка получена константа лептонного распада ρ -мезона, численное значение которой находится в хорошем согласии с экспериментальными данными [21].

В работе [167] проведен расчет электромагнитного формфактора и среднеквадратичного радиуса пиона и каона. В результате вычислений выявлена сильная зависимость электромагнитного формфактора пиона

и каона от массы конституентного кварка.

Расчеты электромагнитного формфактора пиона [123] в различных моделях кварк-антикваркового взаимодействия показали, что при фиксированной массе конституентного кварка соответствующие кривые собираются в "пучки". Сравнение результатов расчета с экспериментом позволило зафиксировать значение массы конституента.

Исследование электромагнитного формфактора пиона от массы конституента в асимптотической области [103] показало, что при переходе к пертурбативному режиму КХД наблюдается слабая зависимость электромагнитного формфактора от массы конституентного кварка. Кривые, описывающие формфактор пиона для разных масс конституентного кварка при больших переданных импульсах становятся неразличимыми.

Расчет константы лептонного распада для разных масс конституентного кварка и волновых функций ρ -мезона

Приведем расчет константы лептонного распада ρ -мезона для разных масс конституентного кварка и волновых функций.

Для расчета используем аналитическое выражение (2.41). Параметры конституентных кварков фиксируются следующим образом: масса кварка, сумма аномальных магнитных моментов берутся из пионных расчетов [123]. Параметр взаимодействия в волновой функции фиксируется из требования описания среднеквадратичного радиуса ρ -мезона.

Таблица 3.1: Расчеты константы $f_\rho(MeV)$ для разных масс конституентного кварка и волновых функций; $b(GeV)$ -параметр волновой функции.

	$M = 0.22 GeV$		$M = 0.25 GeV$		$M = 0.33 GeV$	
Модель	b	f_ρ	b	f_ρ	b	f_ρ
(2.48)	0.228	152.2	0.219	144.4	0.205	129.2
(2.49)	0.217	153.6	0.209	146.0	0.192	128.1
(2.50)	0.379	154.9	0.355	142.8	0.313	119.0

Из таблицы 3.1 видно, что полученные значения константы лептонного распада хорошо согласуются с экспериментом (2.51) при массе кварка $M = 0.22 GeV$. В этой связи стоит упомянуть работу [168], в которой обсуждались результаты расчетов электромагнитного формфактора пиона для разных масс конституентного кварка при

$Q^2 \leq 2 \text{ GeV}$. В [168] было показано, что совпадение расчетов пионного формфактора с экспериментом наблюдалось при массе кварка $M = 0.21 - 0.22 \text{ GeV}$. В настоящей диссертационной работе зафиксированная масса кварка $M = 0.22 \text{ GeV}$ из пионных расчетов [123] хорошо описывает экспериментальное значение константы лептонного распада ρ -мезона (2.51). Таким образом, расчет константы лептонного распада подтверждает полученное в [168] ограничение на массу конституентного кварка.

Представляет интерес анализ зависимости электромагнитных формфакторов ρ -мезона от параметров модели. Данный анализ также позволит ограничить произвол в выборе параметров составной кварковой модели при описании электрослабых характеристик составных систем.

Электромагнитные формфакторы ρ -мезона

Процедура построения матричного элемента тока для ρ -мезона в рамках мгновенной формы РКМ подробно рассмотрена в [60, 61]. В связи с этим представим только окончательные выражения для квадрупольного и магнитного формфакторов ρ -мезона (выражение для зарядового формфактора приводится в (2.43)):

$$G_Q(Q^2) = \frac{2 M_\rho^2}{Q^2} \int d\sqrt{s} d\sqrt{s'} \varphi(s) g_{0Q}(s, Q^2, s') \varphi(s'), \quad (3.1)$$

$$G_M(Q^2) = - M_\rho \int d\sqrt{s} d\sqrt{s'} \varphi(s) g_{0M}(s, Q^2, s') \varphi(s'),$$

где g_{0Q} , g_{0M} - соответственно квадрупольный и магнитный формфакторы свободной двухчастичной системы с квантовыми числами ρ -мезона, явный вид которых представлен в приложении 2 настоящей диссертации; $\varphi(s)$ - волновая функция, определяемая выражениями (2.36).

Как и в случае с пионом (см., например, [123]) феноменологические волновые функции выбраны в виде (2.48)-(2.50). Для саковских формфакторов кварка используем выражения (2.45)-(2.47). Масса ρ -мезона выбрана из [21]: $M_\rho = 775.5 \pm 0.4 \text{ MeV}$.

Зависимость электромагнитных формфакторов ρ -мезона от выбора волновой функции

Проведем анализ зависимости электромагнитных формфакторов от выбора волновой функции.

Результаты расчета электромагнитных формфакторов ρ -мезона представлены на рисунках 3.1–3.3.

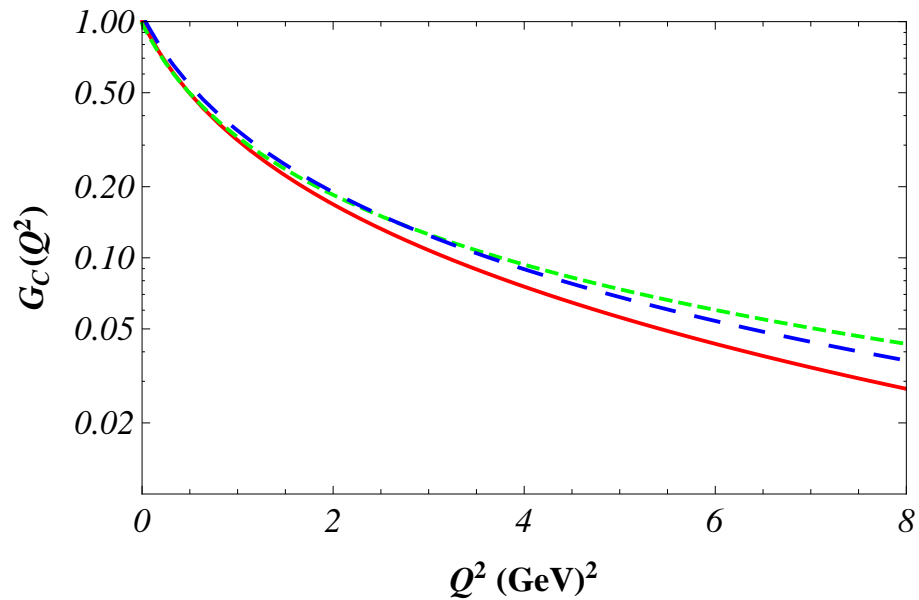


Рис. 3.1: Результаты расчета зарядового формфактора ρ -мезона для различных волновых функций при массе кварка $M = 0.22 \text{ GeV}$ (сплошная линия - волновая функция (2.48); пунктирная линия - волновая функция (2.49); штрихованная линия - волновая функция (2.50)).

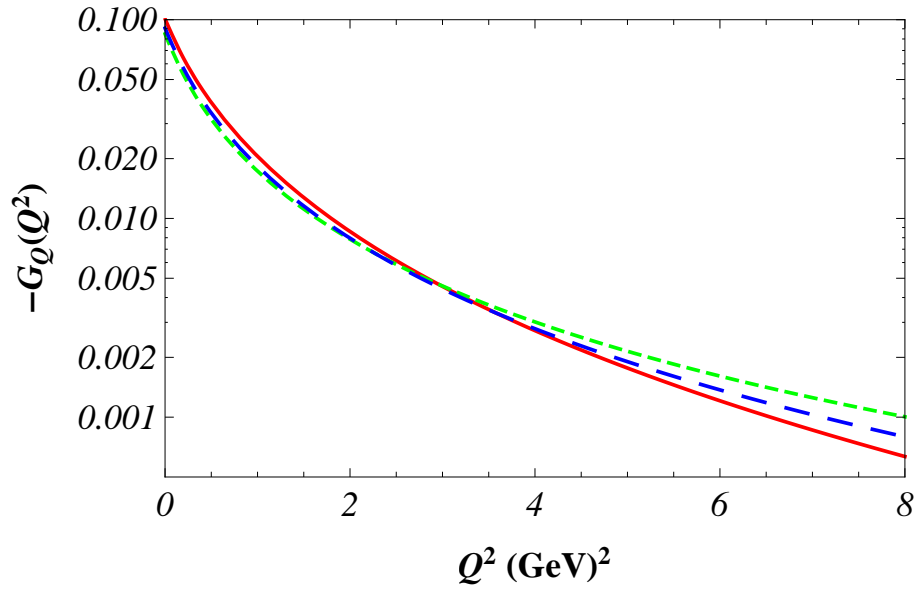


Рис. 3.2: Результаты расчета квадрупольного формфактора ρ -мезона. Обозначения аналогичны рисунку 3.1.

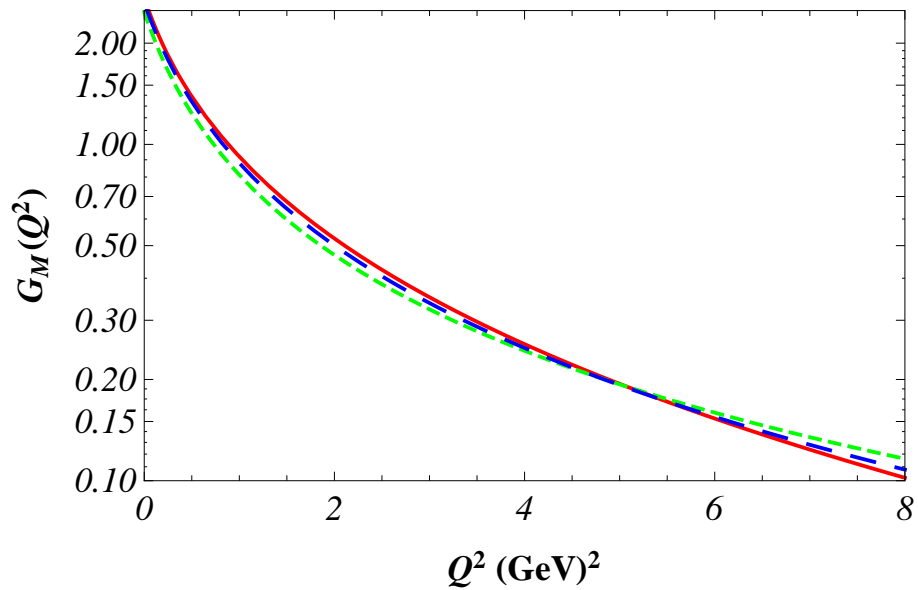


Рис. 3.3: Результаты расчета магнитного формфактора ρ -мезона. Обозначения аналогичны рисунку 3.1.

Из рисунков 3.1-3.3 следует, что зависимость формфакторов от волновой функции прослеживается слабо.

Отметим, что результаты расчетов электромагнитных формфакторов ρ -мезона в работах [97, 160] отличаются от результатов, полученных в настоящей диссертационной работе. По-видимому, различие связано

с тем, что используемое в работах [97, 160] общепринятое импульсное приближение для матричного элемента электрослабого тока приводит к нарушению закона сохранения тока. Следовательно, в этих работах электромагнитные формфакторы получены без учета закона сохранения. Напомним, что используемое в настоящей работе МИП не приводит к нарушению этого условия.

Зависимость электромагнитных формфакторов ρ -мезона от массы конститuentного кварка

Проанализируем теперь вычисления электромагнитных формфакторов ρ -мезона для разных масс конститuentного кварка. В предыдущем пункте была показана слабая зависимость электромагнитных формфакторов от выбора волновой функции, поэтому совместим графики расчетов с разными массами и волновыми функциями на одном рисунке. Результаты расчетов представлены на рисунках 3.4–3.6.

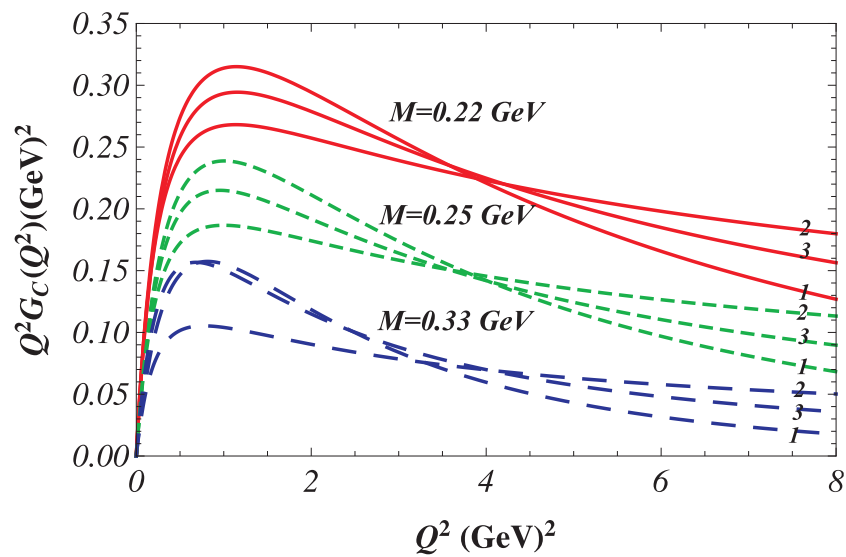


Рис. 3.4: Результаты расчета зарядового формфактора ρ -мезона для различных волновых функций и масс конститuentного кварка. 1 - волновая функция (2.48); 2 - волновая функция (2.49); 3 - волновая функция (2.50). Значение параметров представлены в таблице 3.1.

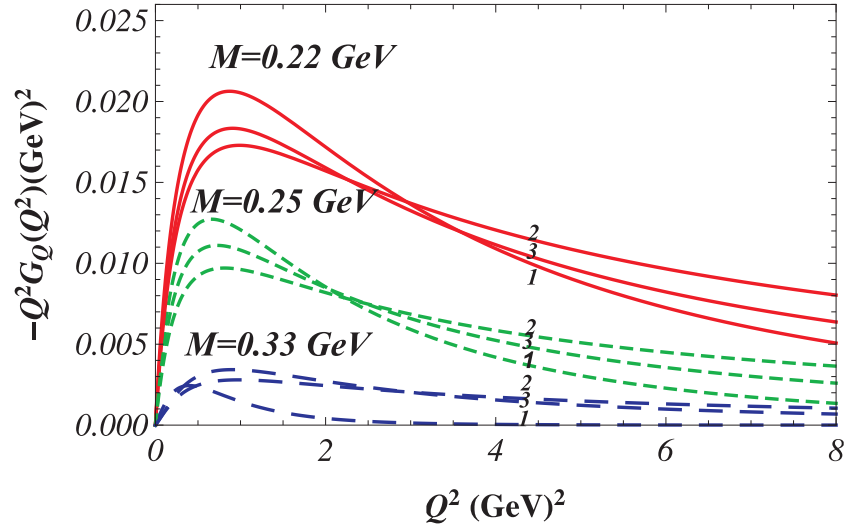


Рис. 3.5: Результаты расчета квадрупольного формфактора ρ -мезона для различных волновых функций и масс конститuentного кварка. Обозначения аналогичны Рис. 3.4.

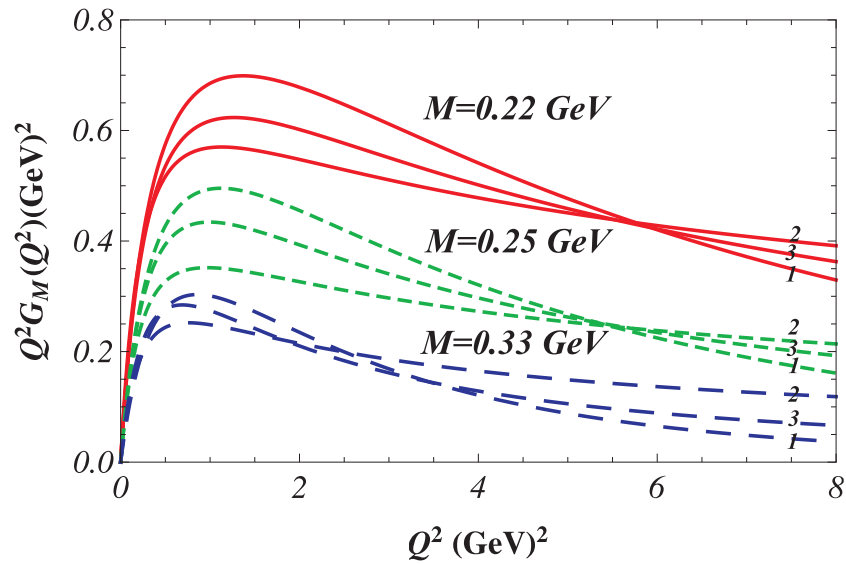


Рис. 3.6: Результаты расчета магнитного формфактора ρ -мезона для различных волновых функций и масс конститuentного кварка. Обозначения аналогичны Рис. 3.4.

По аналогии с пионными расчетами [123], формфакторы ρ -мезона собираются в "пучки". Наиболее ярко выражены "пучки" для магнитного формфактора. Экспериментальных данных по измерению формфакторов ρ -мезона пока нет, следовательно, невозможно провести оценки массы конститuentного кварка. Заметим, что при увеличении массы кварка меняется положение "пучков". При $M \geq 0.33 \text{ GeV}$

"пучок" становится менее отчетливым.

Таким образом, в настоящей диссертационной работе достигнуто согласованное описание электрослабых свойств π - и ρ -мезонов. Т.е. при одних и тех же параметрах конституентной кварковой модели удается описать одновременно электрослабые характеристики π - и ρ -мезонов.

3.2 Параметризация недиагонального по полному угловому моменту электромагнитного тока свободной двухчастичной системы

Перейдем теперь к описанию радиационных переходов векторных мезонов. Такие процессы рассматривались в рамках различных теоретических исследований (см., например, [169]-[181]).

В [170] были изучены вклады пиона в сечение распада $\rho \rightarrow \pi\gamma^*$. В рамках составной кварковой модели в динамике на световом фронте [169] изучены радиационные переходы $\pi\rho$ и $\pi\omega$, в которых вычислены переходные формфакторы и соответствующие магнитные моменты перехода. В [171] получены матрицы смешивания для распадов $\pi - \eta - \eta'$ and $\rho - \omega - \varphi$. В работах [172]-[181] произведено вычисление ширин и соответствующих переходных формфакторов в распадах типа $V \rightarrow P\gamma^*$.

Рассмотрим процесс $\rho \rightarrow \pi\gamma^*$ в нашем подходе. Для численных расчетов будем использовать параметры из параграфа 3.1.

В составной кварковой модели π - и ρ -мезоны представляются связанным состоянием u и \bar{d} кварков с квантовыми числами $J = L = S = 0$ и $J = S = 1; L = 0$ для пиона и ρ - мезона, соответственно. Будем опускать нулевые величины в векторе состояния с квантовыми числами пиона. Полагая, что массы кварков одинаковые $M_u = M_{\bar{d}} = M$, матричный элемент оператора электромагнитного тока свободной двухчастичной системы с данными квантовыми числами можно записать

в виде:

$$\begin{aligned}
\langle \vec{P}, \sqrt{s} | j_{\mu}^0(0) | \vec{P}', \sqrt{s'}, 1, 0, 1, m' \rangle &= \int \frac{d^3 \vec{p}_1}{2p_{10}} \frac{d^3 \vec{p}_2}{2p_{20}} \frac{d^3 \vec{p}'_1}{2p'_{10}} \frac{d^3 \vec{p}'_2}{2p'_{20}} \cdot \\
&\cdot \langle \vec{P}, \sqrt{s} | \vec{p}_1, m_1; \vec{p}_2, m_2 \rangle \langle \vec{p}_1, m_1; \vec{p}_2, m_2 | j_{\mu}^0(0) | \vec{p}'_1, m'_1; \vec{p}'_2, m'_2 \rangle \cdot \\
&\cdot \langle \vec{p}'_1, m'_1; \vec{p}'_2, m'_2 | \vec{P}', \sqrt{s'}, 1, 0, 1, m' \rangle, \quad (3.2)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\langle \vec{p}_1, m_1; \vec{p}_2, m_2 | j_{\mu}^0(0) | \vec{p}'_1, m'_1; \vec{p}'_2, m'_2 \rangle &= \langle \vec{p}_1, m_1 | j_{\mu 1}^0(0) | \vec{p}'_1, m'_1 \rangle \cdot \\
&\cdot \delta(\vec{p}_2 - \vec{p}'_2) \delta_{m_2 m'_2} + \langle \vec{p}_2, m_2 | j_{\mu 2}^0(0) | \vec{p}'_2, m'_2 \rangle \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}'_1) \delta_{m_1 m'_1}. \quad (3.3)
\end{aligned}$$

Матричные элементы одночастичных токов в (3.3) могут быть представлены в виде (1.89). Коэффициенты Клебша-Гордана определяются равенством (1.92).

Используя метод недиагональной параметризации (см. формулы (2.11)-(2.20)), а также принимая во внимание нулевое значение полного углового момента в пионе, матричный элемент тока в базисе (1.76) можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
\langle \vec{P}, \sqrt{s} | j_0^0(0) | \vec{P}', \sqrt{s'}, 1, 0, 1, m' \rangle &= \\
&= \sum_{\tilde{m}', l', k'} D_{m', \tilde{m}'}^1(P', w) \langle 1 \tilde{m}' l' k' | 00 \rangle Y_{l' k'}(\vec{q}) G_{01}^{0l'}(s, Q^2, s'), \quad (3.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \vec{P}, \sqrt{s} | j_t^1(0) | \vec{P}', \sqrt{s'}, 1, 0, 1, m' \rangle &= \\
&= \sum_{\tilde{m}', l, k, j, n} D_{m', \tilde{m}'}^1(P', w) \langle 1 \tilde{m}' j n | 00 \rangle \langle 1 t l k | j n \rangle Y_{l k}(\vec{q}) G_{01}^{1lj}(s, Q^2, s'). \quad (3.5)
\end{aligned}$$

Приравнивая выражения (3.2) и (3.4)-(3.5), используя переход к каноническому базису (2.13)-(2.14) для оператора тока и выполняя интегрирование в БС с учетом $\vec{q} = (0, 0, q)$, получим аналитические выражения для свободных двухчастичных формфакторов. В силу громоздкости полученных выражений запишем в явном виде только

один формфактор, который будет использоваться в дальнейшем:

$$\begin{aligned}
G_{01}^{111}(s, Q^2, s') &= \frac{\Theta(s, Q^2, s')(s + s' + Q^2)^2}{\sqrt{2}\sqrt{s - 4M^2}\sqrt{s' - 4M^2}\sqrt{4M^2 + Q^2}[\lambda(s, -Q^2, s')]^{1/2}} \cdot \\
&\cdot \cos \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2} \left(\frac{s'(s' - s + 3Q^2)}{[\lambda(s, -Q^2, s')]^{1/2}} (G_M^u(Q^2) + G_M^{\bar{d}}(Q^2)) \right) + \\
&+ \sin \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2} \left(\frac{(s' - s - Q^2)\xi(s, s', Q^2)}{(s + s' + Q^2)\sqrt{s'}} (G_M^u(Q^2) + G_M^{\bar{d}}(Q^2)) \right) - \\
&- \left(\xi(s, s', Q^2) \frac{4M}{(s + s' + Q^2)} (G_E^u(Q^2) + G_E^{\bar{d}}(Q^2)) \right), \tag{3.6}
\end{aligned}$$

где: $\Theta(s, Q^2, s') = \vartheta(s' - s_1) - \vartheta(s' - s_2)$, $\xi(s, s', Q^2) = \sqrt{ss'Q^2 - M^2\lambda(s, -Q^2, s')}$,

$$s_{1,2} = 2M^2 + \frac{1}{2M^2}(2M^2 + Q^2)(s - 2M^2) \mp \frac{1}{2M^2}\sqrt{Q^2(Q^2 + 4M^2)s(s - 4M^2)},$$

ϑ - ступенчатая функция.

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \arctan \frac{\xi(s, s', Q^2)}{M[(\sqrt{s} + \sqrt{s'})^2 + Q^2] + \sqrt{ss'}(\sqrt{s} + \sqrt{s'})}, \\
\omega_2 &= \arctan \frac{\xi(s, s', Q^2)(2M + \sqrt{s} + \sqrt{s'})}{M(s + s' + Q^2)(2M + \sqrt{s} + \sqrt{s'}) + \sqrt{ss'}(4M^2 + Q^2)},
\end{aligned}$$

$\lambda(a, b, c)$ имеет вид (1.73).

Аналитические выражения для остальных трех свободных формфакторов содержатся в приложении 1.

3.3 Вывод формулы для переходного формфактора $F_{\pi\rho}(Q^2)$

Матричный элемент электромагнитного тока перехода $\rho \rightarrow \pi\gamma^*$ можно записать следующим образом (см., например, [169]):

$$\langle \vec{P}_\pi | j_\mu^c(0) | \vec{P}_\rho, 1, m_\rho \rangle = F_{\pi\rho}(Q^2) \varepsilon_{\mu\nu\sigma\delta} \xi^\nu(m_\rho) P_\pi^\sigma P_\rho^\delta, \tag{3.7}$$

где \vec{P}_π и \vec{P}_ρ - 3-импульсы π - и ρ -мезонов, соответственно, $\xi^\nu(m_\rho)$ - 4-вектор поляризации, имеющий вид (2.22); $\varepsilon_{\mu\nu\sigma\delta}$ - антисимметричный

тензор четвертого ранга, $F_{\pi\rho}(Q^2)$ - переходный формфактор, измеряемый на эксперименте.

Для дальнейшей работы с матричным элементом (3.7) перейдем в брейтовскую систему отсчета по аналогии с (2.8).

Подставляя (2.8) в (3.7) с учетом (2.22), получим:

$$\langle \vec{P}_\pi | \tilde{j}_1^c(0) | \vec{P}_\rho, 1, \tilde{m}_\rho \rangle = -\frac{q(\tilde{P}_\pi^0 + \tilde{P}_\rho^0)}{\sqrt{2}} F_{\pi\rho}(Q^2). \quad (3.8)$$

Отметим, что компоненты матричного элемента тока (3.7) $\tilde{j}_0^c, \tilde{j}_2^c$ и \tilde{j}_3^c равны нулю.

С другой стороны, матричный элемент (3.7) можно записать, используя процедуру параметризации недиагонального по полному угловому моменту матричного элемента тока, изложенную во второй главе диссертации.

Поскольку взаимодействие в мгновенной форме РКМ включается только в нулевые компоненты 4-импульса составной системы и генераторы лоренцевских бустов, процедура параметризации матричного элемента (3.7) и итоговые формулы фактически полностью аналогичны случаю свободной двухчастичной системы с квантовыми числами ρ - и π -мезонов (3.4), (3.5):

$$\begin{aligned} \langle \vec{P}_\pi | j_0^c(0) | \vec{P}_\rho, 1, m_\rho \rangle &= \\ &= \sum_{\tilde{m}_\rho, l', k'} D_{m_\rho, \tilde{m}_\rho}^1(P_\rho, w) \langle 1\tilde{m}_\rho l' k' | 00 \rangle Y_{l'k'}(\vec{q}) G_{01}^{0l'}(Q^2), \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{P}_\pi | j_t^c(0) | \vec{P}_\rho, 1, m_\rho \rangle &= \\ &= \sum_{\tilde{m}_\rho, l, k, j, n} D_{m_\rho, \tilde{m}_\rho}^1(P_\rho, w) \langle 1\tilde{m}_\rho j n | 00 \rangle \langle 1t l k | j n \rangle Y_{lk}(\vec{q}) G_{01}^{1lj}(Q^2). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Как было отмечено выше, для радиационного перехода $\rho \rightarrow \pi\gamma^*$ существует единственный формфактор, выражаемый через первую трехмерную компоненту матричного элемента электромагнитного тока:

$$\langle \vec{P}_\pi | j_1^c(0) | \vec{P}_\rho, 1, \tilde{m}_\rho \rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}} G_{01}^{111}(Q^2), \quad (3.11)$$

$G_{01}^{111}(Q^2)$ - переходный формфактор составной системы.

Приравнивая выражения (3.8) и (3.11), получим связь измеряемого на эксперименте формфактора (3.7) и формфактора (3.11) из нашей процедуры параметризации:

$$F_{\pi\rho}(Q^2) = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{q(\tilde{P}_\pi^0 + \tilde{P}_\rho^0)} G_{01}^{111}(Q^2), \quad (3.12)$$

где $\tilde{P}_\pi^0 = \sqrt{M_\pi^2 + \vec{q}^2}$, $\tilde{P}_\rho^0 = \sqrt{M_\rho^2 + \vec{q}^2}$. M_π, M_ρ – массы пиона и ρ -мезона, соответственно.

Для дальнейших вычислений необходимо получить аналитическое выражение для формфактора составной системы $G_{01}^{111}(Q^2)$ через волновые функции в смысле РКМ.

Выражение для переходного формфактора в мгновенной форме РКМ

Рассмотрим снова матричный элемент оператора электромагнитного тока перехода (3.7). Будем считать, что мы имеем дело с двухкварковыми системами с квантовыми числами соответствующими ρ - и π -мезонам.

Т.к. в РКМ вектор состояния составной двухчастичной системы принадлежит прямому произведению двух одночастичных гильбертовых пространств, матричный элемент тока (3.7) можно разложить по базису (1.76), т.е. ввести в (3.7) два единичных оператора:

$$\begin{aligned} \hat{I} &= \int \frac{d^3\vec{P}}{N} d\sqrt{s} |\vec{P}, \sqrt{s}\rangle \langle \vec{P}, \sqrt{s}|, \\ \hat{I} &= \sum_{m'} \int \frac{d^3\vec{P}'}{N'} d\sqrt{s'} |\vec{P}', \sqrt{s}', 1, 0, 1, m'\rangle \langle \vec{P}', \sqrt{s}', 1, 0, 1, m'|. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Подставляя (3.13) в матричный элемент (3.7), получим:

$$\begin{aligned} \langle \vec{P}_\pi | j_\mu^c(0) | \vec{P}_\rho, 1, m_\rho \rangle &= \sum \int \frac{d^3\vec{P}}{N} \frac{d^3\vec{P}'}{N'} d\sqrt{s} d\sqrt{s'} \langle \vec{P}_\pi | \vec{P}, \sqrt{s} \rangle \cdot \\ &\cdot \langle \vec{P}, \sqrt{s} | j_\mu^c(0) | \vec{P}', \sqrt{s}', 1, 0, 1, m' \rangle \langle \vec{P}', \sqrt{s}', 1, 0, 1, m' | \vec{P}_\rho, 1, m_\rho \rangle, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где $\langle \vec{P}_\pi | \vec{P}, \sqrt{s} \rangle$, $\langle \vec{P}', \sqrt{s}', 1, 0, 1, m' | \vec{P}_\rho, 1, m_\rho \rangle$ – волновые функции π - и ρ -мезона в смысле мгновенной формы РКМ.

$$\begin{aligned}\langle \vec{P}_\pi | \vec{P}, \sqrt{s} \rangle &= N_c \delta(\vec{P} - \vec{P}_\pi) \varphi(s), \\ \langle \vec{P}', \sqrt{s'}, 1, 0, 1, m' | \vec{P}_\rho, 1, m_\rho \rangle &= N'_c \delta(\vec{P}' - \vec{P}_\rho) \varphi_1^1(s') \delta_{m'm_\rho},\end{aligned}\quad (3.15)$$

$$\varphi(s) = \sqrt[4]{s} k \psi(k), \quad \varphi_1^1(s') = \sqrt[4]{s'} k' \psi_1^1(k'), \quad (3.16)$$

$\psi(k)$ и $\psi_1^1(k')$ - волновые функции, удовлетворяющие условиям нормировки:

$$\int \psi^2(k) k^2 dk = 1, \quad \int [\psi_1^1(k')]^2 k'^2 dk' = 1. \quad (3.17)$$

В обозначениях (3.15), (3.16) учтены значения квантовых чисел двухкварковых систем π - и ρ -мезонов.

Проводя с помощью δ - функций интегрирование по переменным \vec{P} и \vec{P}' , получим:

$$\begin{aligned}\langle \vec{P}_\pi | j_\mu^c(0) | \vec{P}_\rho, 1, m_\rho \rangle &= \int d\sqrt{s} d\sqrt{s'} \frac{N_c N'_c}{N N'} \varphi(s) \varphi_1^1(s') \cdot \\ &\cdot \langle \vec{P}_\pi, \sqrt{s} | j_\mu^c(0) | \vec{P}_\rho, \sqrt{s'}, 1, 0, 1, m_\rho \rangle.\end{aligned}\quad (3.18)$$

Обкладки матричного элемента, входящего в правую часть (3.18), физически описывают систему двух свободных частиц и преобразуются по представлению группы Пуанкаре, генераторы которого не зависят от взаимодействия. Оператор же тока описывает переход между двухкварковыми системами со взаимодействием и преобразуется по другому представлению, генераторы которого зависят от взаимодействия. В силу этого к данному матричному элементу нельзя напрямую применить процедуру параметризации, описанную во второй главе и представить в виде (2.11) и (2.20). Однако, правую часть (3.18) можно рассматривать как функционал, заданный на пространстве основных функций $\phi(s, s') = \varphi(s) \varphi_1^1(s')$ и, соответственно, матричный элемент электромагнитного тока как обобщенную функцию, т.е. объект, имеющий смысл только под знаком интеграла. В силу соотношений (3.13), (3.14) трансформационные свойства левой и правой частей (3.18) являются одинаковыми. В связи с этим, недиагональная параметризация матричного элемента под интегралом представляется в

виде, аналогичном (3.9), (3.10):

$$\begin{aligned} & \frac{N_c N'_c}{N N'} \langle \vec{P}_\pi, \sqrt{s} | j_0^c(0) | \vec{P}_\rho, \sqrt{s'}, 1, 0, 1, m_\rho \rangle = \\ & = \sum_{\tilde{m}_\rho, l', k'} D_{m_\rho, \tilde{m}_\rho}^1(P_\rho, w) \langle 1 \tilde{m}_\rho l' k' | 00 \rangle Y_{l' k'}(\vec{q}) H_{01}^{0l'}(s, Q^2, s'), \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} & \frac{N_c N'_c}{N N'} \langle \vec{P}_\pi, \sqrt{s} | j_t^{c1}(0) | \vec{P}_\rho, \sqrt{s'}, 1, 0, 1, m_\rho \rangle = \\ & = \sum_{\tilde{m}_\rho, t, k, n} D_{m_\rho, \tilde{m}_\rho}^1(P_\rho, w) \langle 1 \tilde{m}_\rho j n | 00 \rangle \langle 1 t l k | j n \rangle Y_{l k}(\vec{q}) \cdot \\ & \cdot H_{01}^{1, l, j}(s, Q^2, s'), \end{aligned} \quad (3.20)$$

где $H_{01}^{0l'}(s, Q^2, s')$, $H_{01}^{1l1}(s, Q^2, s')$ – формфакторы.

Подставим формулы (3.9), (3.10) и (3.19), (3.20) в (3.18) и получим, что:

$$G_{01}^{01}(Q^2) = \int d\sqrt{s} d\sqrt{s'} H_{01}^{01}(s, Q^2, s') \varphi(s) \varphi_1^1(s'), \quad (3.21)$$

$$G_{01}^{1l1}(Q^2) = \int d\sqrt{s} d\sqrt{s'} H_{01}^{1l1}(s, Q^2, s') \varphi(s) \varphi_1^1(s'). \quad (3.22)$$

Отметим, что явный вид инвариантных функций $H_{01}^{01}(s, Q^2, s')$, $H_{01}^{1l1}(s, Q^2, s')$, вообще говоря, неизвестен. Для конкретизации их явного вида воспользуемся МИП, которое подробно обсуждалось во второй главе диссертации. МИП заключается в замене $H_{01}^{01}(s, Q^2, s')$, $H_{01}^{1l1}(s, Q^2, s')$ на свободные двухчастичные формфакторы $G_{01}^{01}(s, Q^2, s')$ и $G_{01}^{1l1}(s, Q^2, s')$ из (3.4), (3.5):

$$G_{01}^{01}(Q^2) = \int d\sqrt{s} d\sqrt{s'} G_{01}^{01}(s, Q^2, s') \varphi(s) \varphi_1^1(s'), \quad (3.23)$$

$$G_{01}^{1l1}(Q^2) = \int d\sqrt{s} d\sqrt{s'} G_{01}^{1l1}(s, Q^2, s') \varphi(s) \varphi_1^1(s'). \quad (3.24)$$

Отметим, что замена инвариантных функций в (3.21), (3.22) в рамках МИП не нарушает трансформационных свойств и закона сохранения тока.

Таким образом, с учетом (3.12) окончательное выражение для измеряемого на эксперименте переходного формфактора $F_{\pi\rho}(Q^2)$ в МИП

имеет следующий вид:

$$F_{\pi\rho}(Q^2) = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{q(\tilde{P}_\pi^0 + \tilde{P}_\rho^0)} \int d\sqrt{s}d\sqrt{s'} G_{01}^{111}(s, Q^2, s') \varphi(s) \varphi_1^1(s'). \quad (3.25)$$

3.4 Численный расчет формфактора $F_{\pi\rho}(Q^2)$

При расчете переходного формфактора по формуле (3.25) будем использовать для пиона и ρ -мезона волновую функцию основного состояния гармонического осциллятора (2.48), которую часто используют в рамках РКМ.

Параметр волновой функции b будем фиксировать из требования описания среднеквадратичных радиусов мезонов: $b_\pi = 0.278$ GeV – для π -мезона [60], $b_\rho = 0.231$ GeV – для ρ - мезона [61].

Для сравнения наших результатов с результатами в других подходах выберем саксовские формфакторы кварков в виде (2.45):

$$G_E(Q^2) = e_q f_q(Q^2), \quad G_M(Q^2) = (e_q + \kappa_q) f_q(Q^2),$$

формфактор кварка возьмем из работы [169]:

$$f_q(Q^2) = \frac{1}{1 + \langle r_q^2 \rangle Q^2 / 6}. \quad (3.26)$$

Расчеты произведем при следующих значениях параметров: $\langle r_q^2 \rangle = 0.3/M^2$, $M = 0.22$ GeV – масса u - и \bar{d} -кварков, сумма аномальных магнитных моментов кварков, входящая в наши выражения, $\kappa_u + \kappa_{\bar{d}} = 0.09$ [143]. Результаты расчета переходного формфактора (3.25) представлены на Рис. 3.7–3.8.

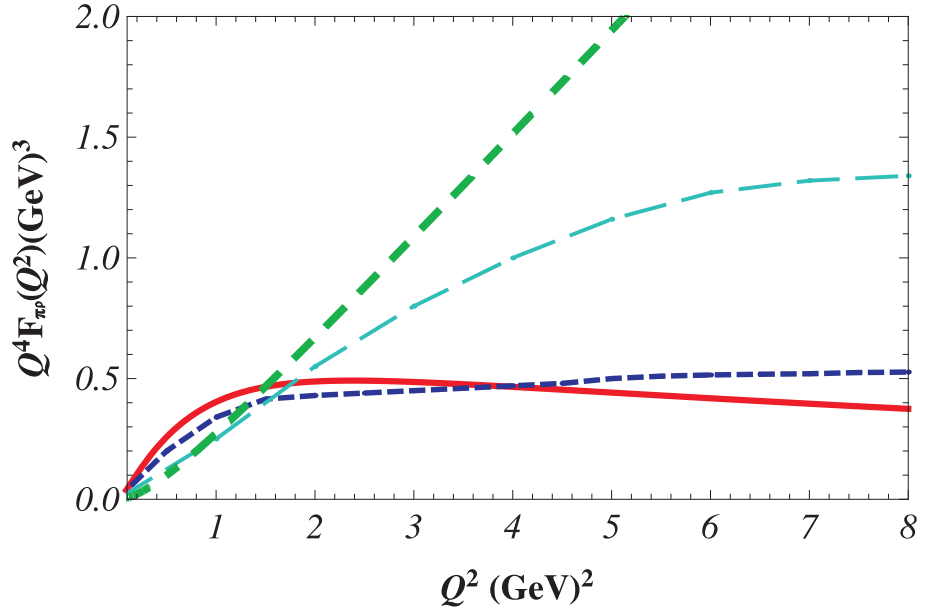


Рис. 3.7: Результаты расчета переходного формфактора для волновой функции (2.48). Сплошная линия - результаты расчета по формуле (3.25) с использованием (3.26); короткий штрих - расчеты в составной кварковой модели [169]; средний штрих - результаты расчета в модели векторной мезонной доминантности; длинный штрих - результаты расчета в квазипотенциальном подходе (см., например, [176]).

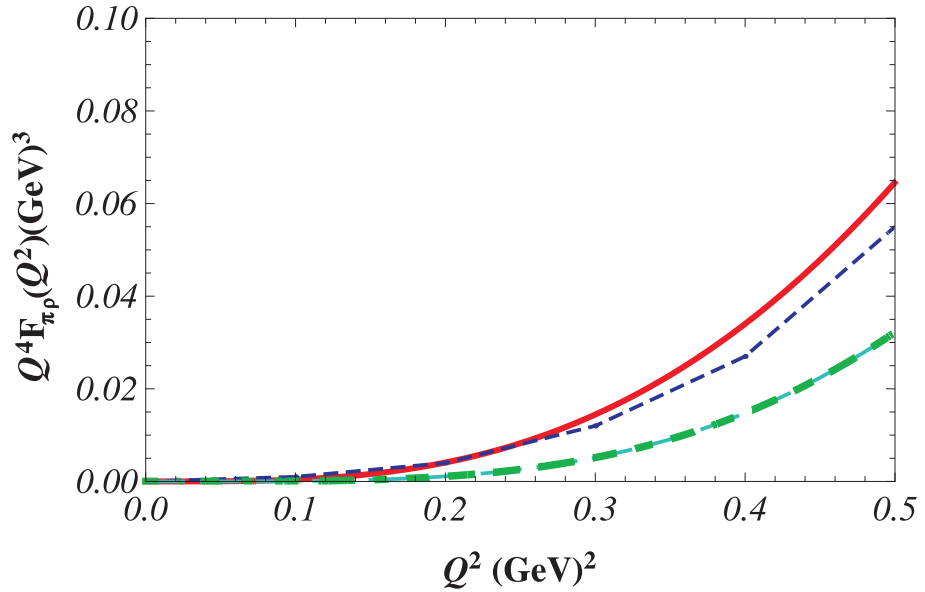


Рис. 3.8: Результаты расчета переходного формфактора при $Q^2 \leq 0.5 \text{ GeV}^2$. Обозначения те же, что и на рисунке 3.7.

Проведем сравнительный анализ расчетов переходного формфактора $F_{\pi\rho}(Q^2)$, полученных в диссертации с результатами работы [169]. Описание радиационного перехода $\rho \rightarrow \pi\gamma^*$ в диссертации и в [169]

осуществляется в рамках составной кварковой модели. Построение матричного элемента электромагнитного тока в работе [169] проводится в динамике на световом фронте. Построение электромагнитного тока в подходе, используемом в настоящей диссертационной работе, производится в рамках мгновенной формы РКМ. В качестве волновой функции используется одна и та же волновая функция основного состояния гармонического осциллятора. Однако, отметим, что наблюдается хорошее совпадение полученных результатов с расчетами [169] лишь при $Q^2 \leq 0,5 \text{ GeV}^2$ (см. Рис. 3.8).

Результаты вычислений переходного формфактора в развитой в диссертации формулировке составной кварковой модели при малых переданных импульсах ($Q^2 \leq 0,5 \text{ GeV}^2$) близки к результатам модели векторной мезонной доминантности (см., например, [176]), т.о., фактически, выполняется принцип соответствия.

Отличие в результатах наблюдается в области $Q^2 > 2 \text{ GeV}^2$ (см. Рис. 3.7). Возможно, одна из причин таких расхождений связана с различием приближений, используемых при построении матричного элемента электромагнитного тока в разных формах РКМ. Кроме того, используемое в [169] ИП нарушает закон сохранения электромагнитного тока. Сформулированное в нашем подходе МИП не приводит к нарушению этого условия.

При больших переданных импульсах видно, что в случае использования формфактора конституентного кварка (3.26) произведение $Q^4 F_{\pi\rho}(Q^2)$ близко к постоянной величине. Если вместо (3.26) использовать формфактор кварка логарифмического типа (2.46), то результаты расчетов величины $Q^2 F_{\pi\rho}(Q^2)$ с точностью до логарифмической поправки выходят на константу, что совпадает с предсказаниями КХД.

Используя аналитическое выражение для переходного формфактора (3.25), произведем расчет соответствующего магнитного момента перехода по формуле:

$$\mu_{\pi\rho} = F_{\pi\rho}(0) . \quad (3.27)$$

Из (3.27) следует, что магнитный момента перехода $\mu_{\pi\rho} = 0.736 \text{ GeV}^{-1}$. Результаты расчета хорошо согласуются с экспериментальными данными: $\mu_{\pi\rho}^{exp} = 0.741 \pm 0.038 \text{ GeV}^{-1}$ [22]. Заметим, что эта величина вычислена в нашем подходе без подгоночных параметров.

Глава 4

Электромагнитная структура двухчастичных систем в рамках основных форм РКМ

4.1 Построение матричного элемента электрослабого тока свободной бесспиновой двухчастичной системы в основных формах РКМ

Рассмотрим для простоты и наглядности модельную задачу об описании электромагнитной структуры системы, состоящей из двух бесспиновых частиц, одна из которых является незаряженной, в S -состоянии относительного движения.

Мгновенная форма динамики

Рассмотрим систему двух бесспиновых частиц. В соответствии с общими принципами квантовой механики вектор состояния двух свободных частиц с импульсами \vec{p}_1, \vec{p}_2 и массами M_1, M_2 в мгновенной форме динамики строится как прямое произведение векторов состояния отдельных частиц (1.60):

$$|\vec{p}_1, M_1; \vec{p}_2, M_2\rangle = |\vec{p}_1, M_1\rangle \otimes |\vec{p}_2, M_2\rangle.$$

В дальнейших расчетах будем считать, что $M_1 = M_2 = M$.

Заметим, что одночастичные векторы состояния имеют нормировку (1.56):

$$\langle \vec{p}_1 | \vec{p}_1' \rangle = 2p_0 \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_1').$$

Для описания двухчастичной системы можно ввести также базис с явно отделенным движением центра масс (1.76):

$$|\vec{P}, \sqrt{s}\rangle, \quad (4.1)$$

который нормирован следующим образом:

$$\langle \vec{P}, \sqrt{s} | \vec{P}', \sqrt{s'} \rangle = N 2 P_0 \delta(\vec{P} - \vec{P}') \delta(\sqrt{s} - \sqrt{s'}). \quad (4.2)$$

Здесь $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, $P^2 = s$, \sqrt{s} - инвариантная масса системы двух свободных частиц, N - нормировочная константа, имеющая вид (1.78).

Используя разложения Клебша-Гордана для группы Пуанкаре, матричный элемент оператора электромагнитного тока свободной двухчастичной системы в базисе (4.1) можно записать:

$$\begin{aligned} \langle \vec{P}, \sqrt{s} | j_\mu^0(0) | \vec{P}', \sqrt{s'} \rangle &= \int \frac{d^3 \vec{p}_1}{2p_{10}} \int \frac{d^3 \vec{p}_2}{2p_{20}} \int \frac{d^3 \vec{p}'_1}{2p'_{10}} \int \frac{d^3 \vec{p}'_2}{2p'_{20}} \langle \vec{P}, \sqrt{s} | \vec{p}_1; \vec{p}_2 \rangle \cdot \\ &\cdot \langle \vec{p}_1; \vec{p}_2 | j_\mu^0(0) | \vec{p}'_1; \vec{p}'_2 \rangle \langle \vec{p}'_1; \vec{p}'_2 | \vec{P}', \sqrt{s'} \rangle, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где коэффициенты Клебша-Гордана определяются следующим образом:

$$\langle \vec{P}, \sqrt{s} | \vec{p}_1; \vec{p}_2 \rangle = 2\sqrt{s} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} [\lambda(s, M^2, M^2)]^{-1/2} 2P_0 \delta(P - p_1 - p_2). \quad (4.4)$$

Матричный элемент электромагнитного тока свободной двухчастичной системы в базисе (1.60), учитывая, что одна частица является незаряженной, можно представить в следующем виде:

$$\langle \vec{p}_1; \vec{p}_2 | j_\mu^0(0) | \vec{p}'_1; \vec{p}'_2 \rangle = \langle \vec{p}_2 | \vec{p}'_2 \rangle \langle \vec{p}_1 | j_{1\mu}(0) | \vec{p}'_1 \rangle. \quad (4.5)$$

Одночастичный матричный элемент тока выражается через единственный зарядовый формфактор частицы $f_{10}(Q^2)$ [63]:

$$\langle \vec{p}_1 | j_{1\mu}(0) | \vec{p}'_1 \rangle = f_{10}(Q^2) K'_{1\mu}, \quad (4.6)$$

здесь $-Q^2 = (p_1 - p'_1)^2$ - квадрат переданного импульса, $K'_{1\mu} = p_{1\mu} + p'_{1\mu}$ - 4-вектор, описывающий ковариантные свойства матричного элемента (4.6).

С другой стороны, в базисе (4.1) матричный элемент тока можно представить в виде:

$$\langle \vec{P}, \sqrt{s} | j_\mu^0(0) | \vec{P}', \sqrt{s'} \rangle = A_\mu(s, Q^2, s') g_0(s, Q^2, s'), \quad (4.7)$$

где $g_0(s, Q^2, s')$ - т.н. свободный двухчастичный формфактор,

$A_\mu(s, Q^2, s')$ - функция, отвечающая за трансформационные свойства матричного элемента и имеющая вид:

$$A_\mu(s, Q^2, s') = \frac{1}{Q^2} [P_\mu(s - s' + Q^2) + P'_\mu(s' - s + Q^2)] . \quad (4.8)$$

Приравнивая выражения (4.3) и (4.7) и выполняя интегрирование в лабораторной системе $\vec{P}' = 0, \vec{P} = (0, 0, P)$, получим аналитическое выражение для свободного двухчастичного формфактора:

$$g_0(s, Q^2, s') = \frac{(s + s' + Q^2)^2 Q^2 \Theta(s, Q^2, s')}{2\sqrt{s - 4M^2} \sqrt{s' - 4M^2} [\lambda(s, Q^2, s')]^{3/2}} f_{10}(Q^2), \quad (4.9)$$

где введены следующие обозначения:

$$\Theta(s, Q^2, s') = \vartheta(s' - s_1) - \vartheta(s' - s_2) , \quad (4.10)$$

$$s_{1,2} = 2M^2 + \frac{1}{2M^2} (2M^2 + Q^2)(s - 2M^2) \mp \frac{1}{2M^2} \sqrt{Q^2(Q^2 + 4M^2)s(s - 4M^2)} . \quad (4.11)$$

ϑ - ступенчатая функция.

Точечная форма динамики

Рассмотрим процедуру параметризации матричного элемента оператора электрослабого тока в точечной форме динамики. Вектор состояния частицы в точечной форме представляется следующим образом:

$$|\vec{v}, M\rangle, \quad (4.12)$$

где $\vec{v} = \vec{p}/M$, M - скорость и масса частицы соответственно. Для векторов состояния (4.12) примем нормировку (см., например, [110]):

$$\langle \vec{v} | \vec{v}' \rangle = 2v_0 \delta(\vec{v} - \vec{v}'), \quad (4.13)$$

где $v_0 = p_0/M$.

Как и в случае построения базиса (4.1) перейдем к базису с явно отделенным движением центра масс:

$$|\vec{V}, \sqrt{s}\rangle, \quad (4.14)$$

векторы которого нормированы следующим образом:

$$\langle \vec{V}, \sqrt{s} | \vec{V}', \sqrt{s'} \rangle = \tilde{N} \delta(\vec{V} - \vec{V}') \delta(\sqrt{s} - \sqrt{s'}) . \quad (4.15)$$

Здесь $\vec{V} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, $V^\mu V_\mu = 1$, $\tilde{N} = 2V_0/8k$.

Матричный элемент оператора электромагнитного тока свободной двухчастичной системы в точечной форме запишется в виде:

$$\begin{aligned} \langle \vec{V}, \sqrt{s} | j_\mu^0(0) | \vec{V}', \sqrt{s'} \rangle &= \int \frac{d^3 \vec{v}_1}{2v_{10}} \int \frac{d^3 \vec{v}_2}{2v_{20}} \int \frac{d^3 \vec{v}'_1}{2v'_{10}} \int \frac{d^3 \vec{v}'_2}{2v'_{20}} \langle \vec{V}, \sqrt{s} | \vec{v}_1; \vec{v}_2 \rangle \cdot \\ &\cdot \langle \vec{v}_1; \vec{v}_2 | j_\mu^0(0) | \vec{v}'_1; \vec{v}'_2 \rangle \langle \vec{v}'_1; \vec{v}'_2 | \vec{V}', \sqrt{s'} \rangle, \end{aligned} \quad (4.16)$$

где коэффициенты Клебша-Гордана определяются так:

$$\langle \vec{V}, \sqrt{s}, m | \vec{v}_1, m_1; \vec{v}_2, m_2 \rangle = 2\sqrt{s} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} [\lambda(s, M^2, M^2)]^{-1/2} 2V_0 \delta(V - v_1 - v_2). \quad (4.17)$$

Одночастичный матричный элемент тока в точечной форме запишется следующим образом:

$$\langle \vec{v}_1 | j_{1\mu}(0) | \vec{v}'_1 \rangle = f_{10}(Q^2) \tilde{K}'_{1\mu}, \quad (4.18)$$

здесь

$$\tilde{K}'_{1\mu} = (v_{1\mu} + v'_{1\mu}).$$

С другой стороны, в базисе (4.14) матричный элемент тока можно представить в виде:

$$\langle \vec{V}, \sqrt{s} | j_\mu^0(0) | \vec{V}', \sqrt{s'} \rangle = \tilde{A}_\mu(s, Q^2, s') g_0(s, Q^2, s'), \quad (4.19)$$

где $\tilde{A}_\mu(s, Q^2, s')$ имеет вид:

$$\tilde{A}_\mu(s, Q^2, s') = \frac{1}{Q^2} [V_\mu(s - s' + Q^2) \sqrt{s} + V'_\mu(s' - s + Q^2) \sqrt{s'}]. \quad (4.20)$$

Приравнивая матричные элементы (4.16) и (4.19), выполняя интегрирование в системе $\vec{V}' = 0$, $\vec{V} = (0, 0, V)$ и производя замену $\vec{V} = \vec{P}/\sqrt{s}$, получим аналитическое выражение для свободного двухчастичного формфактора, совпадающее с выражением (4.9).

Динамика на световом фронте

Построим теперь матричный элемент тока в динамике на световом фронте. В этой форме динамики одночастичные состояния описываются вектором состояния:

$$|\tilde{p}\rangle, \quad (4.21)$$

где

$$\tilde{\vec{p}} = (p_{\perp}, p^+), \quad p_{\perp} = (p^1, p^2), \quad p^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(p^0 + p^3). \quad (4.22)$$

Роль энергии играет величина p^- :

$$p^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(p^0 - p^3).$$

Вектор состояния (4.21) нормирован следующим образом:

$$\langle \tilde{\vec{p}} | \tilde{\vec{p}}' \rangle = 2p_0 \delta(p_{\perp} - p'_{\perp}) \delta(p^+ - p'^+). \quad (4.23)$$

Состояние свободной двухчастичной системы по аналогии с (4.1) можно описать вектором состояния:

$$|\tilde{\vec{P}}, \sqrt{s}\rangle = \int \frac{d^3 \tilde{p}_1}{2p_{10}} \int \frac{d^3 \tilde{p}_2}{2p_{20}} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} |\tilde{\vec{p}}_1; \tilde{\vec{p}}_2\rangle. \quad (4.24)$$

Базисы (4.1) и (4.24) можно связать следующим образом:

$$|\tilde{\vec{P}}, \sqrt{s}\rangle = \frac{\partial[\tilde{\vec{P}}\sqrt{s}]}{\partial[\vec{P}\sqrt{s}]} |\vec{P}, \sqrt{s}\rangle, \quad (4.25)$$

где

$$\frac{\partial[\tilde{\vec{P}}\sqrt{s}]}{\partial[\vec{P}\sqrt{s}]} = 1. \quad (4.26)$$

Из (4.26) следует, что для свободной частицы двухчастичные базисы в мгновенной форме динамики и динамики на световом фронте совпадают. Поэтому переменные p_{\perp}, p^+, p^- по-прежнему однозначно определяются каноническими величинами p_0, \vec{p} . Проводя такие же рассуждения как в мгновенной и точечной формах, получим выражение для свободного двухчастичного формфактора, совпадающее с (4.9).

4.2 Построение матричного элемента электрослабого тока системы двух бесспиновых частиц со взаимодействием

Для мгновенной формы процедура построения тока подробно обсуждалась в [60]-[63]. Рассмотрим ее в точечной форме динамики и динамики на световом фронте.

Вектор состояния составной системы в точечной форме представляется в виде:

$$|\vec{v}_c, M_c\rangle, \quad (4.27)$$

где \vec{v}_c - скорость, M_c - масса составной системы, обозначение для которой в векторах состояний будет в дальнейшем опускаться.

Построим матричный элемент оператора электромагнитного тока $j_c^\mu(0)$ для системы двух взаимодействующих частиц:

$$\langle \vec{v}_c | j_c^\mu(0) | \vec{v}_c' \rangle. \quad (4.28)$$

В силу того, что в РКМ вектор состояния составной двухчастичной системы принадлежит прямому произведению двух одночастичных гильбертовых пространств, матричный элемент тока (4.28) можно разложить по базису (4.14).

Воспользуемся полнотой набора двухчастичных состояний в точечной форме:

$$\frac{1}{\tilde{N}\tilde{N}'} \int d^3\vec{V} \int d\sqrt{s} |\vec{V}, \sqrt{s}\rangle \langle \vec{V}, \sqrt{s}| = I. \quad (4.29)$$

В результате получим:

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}_c | j_c^\mu(0) | \vec{v}_c' \rangle &= \frac{1}{\tilde{N}\tilde{N}'} \int d^3\vec{V} \int d^3\vec{V}' \int d\sqrt{s} \int d\sqrt{s'} \langle \vec{v}_c | \vec{V}, \sqrt{s} \rangle \cdot \\ &\cdot \langle \vec{V}', \sqrt{s'} | \vec{v}_c' \rangle \cdot \langle \vec{V}, \sqrt{s} | j_c^\mu(0) | \vec{V}', \sqrt{s'} \rangle, \end{aligned} \quad (4.30)$$

где $\langle \vec{v}_c | \vec{V}, \sqrt{s} \rangle$ - волновая функция в смысле точечной формы динамики, имеющая вид:

$$\langle \vec{v}_c | \vec{V}, \sqrt{s} \rangle = N_c \delta(\vec{V} - \vec{v}_c) \varphi(s), \quad (4.31)$$

где

$$N_c = \frac{\sqrt{M_c v_{0c} V_0}}{2k\sqrt{2}}, \quad \varphi(s) = \sqrt[4]{sk} \psi(k), \quad (4.32)$$

$\psi(k)$ - модельная волновая функция, удовлетворяющая условию нормировки (3.17).

Подставляя (4.31) в (4.30) и "снимая" интегрирование по переменным \vec{V} и \vec{V}' при помощи δ -функций, получим:

$$\langle \vec{v}_c | j_c^\mu(0) | \vec{v}_c' \rangle = \int d\sqrt{s} \int d\sqrt{s'} \varphi(s) \varphi(s') \langle \vec{V}, \sqrt{s} | j_c^\mu(0) | \vec{V}', \sqrt{s'} \rangle. \quad (4.33)$$

Для матричного элемента тока, входящего в правую часть (4.33), нельзя применить процедуру параметризации (4.19), т.к. нельзя из переменных векторов состояний построить 4-вектор, описывающий свойства матричного элемента при пространственно-временных преобразованиях. Это связано с тем, что обкладки матричного элемента, входящего в правую часть (4.33), физически описывают систему двух свободных частиц и преобразуются по представлению, генераторы которого не зависят от взаимодействия. Оператор же тока описывает переход между двухкварковыми системами со взаимодействием и преобразуется по другому представлению, генераторы которого зависят от взаимодействия. Чтобы обойти эту трудность будем рассматривать матричный элемент электрослабого тока как обобщенную функцию, т.е. объект, имеющий смысл только под знаком интеграла. Представим матричный элемент в виде произведения гладкой ковариантной функции и инвариантной обобщенной функции:

$$\langle \vec{V} \sqrt{s} | j_\mu^c(0) | \vec{V}', \sqrt{s'} \rangle = B_\mu(s, Q^2, s') G(s, Q^2, s'), \quad (4.34)$$

где B_μ - 4-вектор, являющийся гладкой ковариантной функцией, явный вид которого пока неизвестен, $G(s, Q^2, s')$ - инвариантная обобщенная функция, содержащая информацию о процессе.

Применим к матричному элементу (4.28) процедуру параметризации:

$$\langle \vec{v}_c | j_\mu^c(0) | \vec{v}'_c \rangle = (v_c + v'_c)_\mu F_c(Q^2). \quad (4.35)$$

Подставим представление (4.35) в (4.33) с учетом (4.34):

$$\int d\sqrt{s} \int d\sqrt{s'} \varphi(s) \varphi(s') B_\mu(s, Q^2, s') G(s, Q^2, s') = (v_c + v'_c)_\mu F_c(Q^2). \quad (4.36)$$

4-вектор B_μ , описывающий трансформационные свойства матричного элемента, не может быть, вообще говоря, построен из переменных, от которых зависят вектора состояния, по причине, обсужденной выше. Для определения вектора B_μ потребуем, чтобы (4.36) было ковариантным равенством в смысле обобщенных функций, т.е. чтобы оно выполнялось для любой основной функции $\varphi(s)$ в любой фиксированной системе отсчета. Варьирование основной функции в функционале (4.36) фактически означает варьирование волновой функции внутреннего движения частиц. При таком варьировании вектор в правой части (4.36)

не будет изменяться, так как он составлен из 4-векторов, описывающих движение системы как целого и независимых от внутреннего движения конstituентов. Формфактор же в правой части при изменении основной функции будет меняться. С другой стороны, при произвольном изменении основной функции 4-вектор в левой части, вообще говоря, будет произвольным образом менять свое направление. Таким образом, чтобы равенство (4.36) выполнялось при любой основной функции достаточно потребовать выполнения равенства:

$$B_\mu(s, Q^2, s') = (v_c + v'_c)_\mu . \quad (4.37)$$

Выполнение этого равенства приводит к выполнению как условия лоренц-ковариантности, так и условия сохранения тока. Подставляя (4.37) в (4.36) мы получаем аналитическое выражение для формфактора составной системы:

$$F_c(Q^2) = \int \int d\sqrt{s}d\sqrt{s'}G(s, Q^2, s')\varphi(s)\varphi(s'), \quad (4.38)$$

где $G(s, Q^2, s')$ - формфактор составной системы.

Следует отметить, что оператор тока составной системы содержит вклады как одночастичных токов, так и двухчастичных $j = j_1 + j_{12}$. Таким образом, формфактор или приведенный матричный элемент $G(s, Q^2, s')$ в (4.38) содержит информацию о динамике рассеяния зондирующей частицы как на каждом отдельном конstituенте, т.е. фактически на свободной двухчастичной системе, так и на двух конstituентах одновременно. Следовательно, формфактор составной системы содержит вклад свободного формфактора, описывающего свободную систему и приведенный матричный элемент, описывающий вклад двухчастичных токов. Однако, расчет формфактора $G(s, Q^2, s')$, включающий учет двухчастичных токов является достаточно трудной задачей. Поэтому, для его вычисления можно использовать т.н. модифицированное импульсное приближение (МИП) [63].

Суть его заключается в том, что в формфакторе $G(s, Q^2, s')$ следует оставить вклад только одночастичных токов, а вклад двухчастичных токов отбросить, т.е. заменить $G(s, Q^2, s')$ на свободный двухчастичный формфактор $g_0(s, Q^2, s')$, определяемый равенством (4.9):

$$F_c(Q^2) = \int \int d\sqrt{s}d\sqrt{s'}g_0(s, Q^2, s')\varphi(s)\varphi(s') . \quad (4.39)$$

Заметим, что ковариантная часть B_μ матричного элемента тока будет по-прежнему включать вклады и одночастичных и двухчастичных токов.

В динамике на световом фронте процедура построения оператора электромагнитного тока аналогична точечной форме. Построим матричный элемент оператора электромагнитного тока для системы двух кварков со взаимодействием в динамике на световом фронте:

$$\langle \tilde{p}_c | j_\lambda^c(0) | \tilde{p}_c \rangle, \quad \lambda = 1, 2, +, - . \quad (4.40)$$

Воспользуемся полнотой набора двухчастичных состояний в динамике на световом фронте:

$$\frac{1}{NN'} \int d^3 \tilde{P} \int d\sqrt{s} | \tilde{P}, \sqrt{s} \rangle \langle \tilde{P}, \sqrt{s} | = I . \quad (4.41)$$

В результате получим:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{p}_c | j_\lambda^c(0) | \tilde{p}_c \rangle &= \frac{1}{NN'} \int d^3 \tilde{P} \int d^3 \tilde{P}' \int d\sqrt{s} \int d\sqrt{s'} \langle \tilde{p}_c | \tilde{P}, \sqrt{s} \rangle \langle \tilde{P}', \sqrt{s'} | \tilde{p}_c \rangle \cdot \\ &\cdot \langle \tilde{P}, \sqrt{s} | j_\lambda(0) | \tilde{P}', \sqrt{s'} \rangle , \end{aligned} \quad (4.42)$$

где $\langle \tilde{p}_c | \tilde{P}, \sqrt{s} \rangle$ - волновая функция в смысле динамики на световом фронте, имеющая вид:

$$\langle \tilde{p}_c | \tilde{P}, \sqrt{s} \rangle = \tilde{N} \delta(\tilde{P} - \tilde{p}_c) \varphi(s), \quad \tilde{N} = \frac{\sqrt{p_{c0} P_0}}{2k\sqrt{2s}} . \quad (4.43)$$

Подставляя (4.43) в (4.42) и "снимая" интегрирование по переменным \tilde{P} и \tilde{P}' , получим:

$$\langle \tilde{p}_c | j_\lambda^c(0) | \tilde{p}_c \rangle = \int d\sqrt{s} \int d\sqrt{s'} \varphi(s) \varphi(s') \langle \tilde{P}, \sqrt{s} | j_\lambda^c(0) | \tilde{P}', \sqrt{s'} \rangle . \quad (4.44)$$

Представим матричный элемент в (4.44) в виде произведения гладкой ковариантной функции и инвариантной обобщенной функции по аналогии с (4.34):

$$\langle \tilde{P} \sqrt{s} | j_c^\lambda(0) | \tilde{P}', \sqrt{s'} \rangle = C^\lambda(s, Q^2, s') G(s, Q^2, s') , \quad (4.45)$$

где C^λ - некоторый 4-вектор. Применим к матричному элементу (4.40) процедуру параметризации:

$$\langle \tilde{p}_c | j_c^\lambda(0) | \tilde{p}_c \rangle = (p_c + p'_c)^\lambda F_c(Q^2) . \quad (4.46)$$

Проводя рассуждения аналогичные точечной форме, получим аналитическое выражение для формфактора составной системы, совпадающее с (4.39).

Отметим, что в результате проведенной в МИП процедуры канонической параметризации для матричного элемента электрослабого тока, удовлетворяющего условиям лоренц-ковариантности и сохранения, получаются одинаковые аналитические выражения для формфакторов. Данный результат доказывает эквивалентность основных форм РКМ при описании электромагнитной структуры простой модельной системы двух бесспиновых частиц, одна из которых незаряжена и условия использования развитого в диссертации метода параметризации.

Параметризация матричного элемента электрослабого тока в системе Брейта

Необходимость отдельного расчета в системе Брейта связана с различием в результатах расчетов, выполненных в работах [60] и [84]. В работе [84] (см. также [182]-[183]) проведены расчеты электромагнитного формфактора пиона в системе Брейта в рамках мгновенной формы РКМ с использованием ИП. Аналогичные вычисления в рамках МИП были осуществлены в [60], правда вместо БС использовалась ЛС. При сравнении результатов [60] и [84] обнаружено сильное различие расчетов для электромагнитного формфактора пиона.

Для наглядности, проведем вычисление зарядового формфактора бесспиновой двухчастичной системы в базисе мгновенной формы РКМ в БС с использованием МИП. Вычисления формфактора бесспиновой двухчастичной системы в ЛС рассмотрены в параграфе 4.1.

Перейдем в систему Брейта (2.8):

$$K'_\mu = (\sqrt{K'^2}, 0, 0, 0), \quad P_\mu = (P_0, \vec{q}), \quad P'_\mu = (P'_0, -\vec{q}).$$

Рассмотрим систему двух бесспиновых частиц одинаковой массы $M_1 = M_2 = M$. Матричный элемент оператора электромагнитного тока для этой системы можно записать в виде (4.3). Коэффициенты Клебша-Гордана определяются из (4.4).

Матричный элемент тока свободной двухчастичной системы, входящий в правую часть (4.3) можно представить в виде (4.5). Одночастичный матричный элемент тока можно записать как в (4.6).

Используя процедуру параметризации, матричный элемент тока, входящий в левую часть (4.3) можно представить в виде (4.7).

Найдем явный вид функции $A_\mu(s, Q^2, s')$, входящей в (4.7) в БС. Для этого матричный элемент тока (4.7) представим в виде:

$$\langle \vec{P}, \sqrt{s} | j_\mu^0(0) | \vec{P}, \sqrt{s'} \rangle = (P_\mu + P'_\mu)g_1(s, Q^2, s') + (P_\mu - P'_\mu)g_2(s, Q^2, s'). \quad (4.47)$$

Налагая на матричный элемент тока (4.47) закон сохранения $j_\mu K^\mu = 0$, получим:

$$\begin{aligned} \langle \vec{P}, \sqrt{s} | j_\mu^0(0) | \vec{P}, \sqrt{s'} \rangle K^\mu &= (P_\mu + P'_\mu)(P^\mu - P'^\mu)g_1(s, Q^2, s') + \\ &+ (P_\mu - P'_\mu)(P^\mu - P'^\mu)g_2(s, Q^2, s') = 0, \end{aligned} \quad (4.48)$$

или

$$\begin{aligned} (P^\mu P_\mu + P'_\mu P^\mu - P_\mu P'^\mu - P'_\mu P'^\mu)g_1(s, Q^2, s') + \\ + (P^\mu P_\mu - P_\mu P'^\mu - P'_\mu P^\mu + P'_\mu P'^\mu)g_2(s, Q^2, s') = 0. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Учитывая (2.8), преобразуем (4.49):

$$(s - s')g_1(s, Q^2, s') + (s + s' - 2P_0P'_0 - 2q^2)g_2(s, Q^2, s') = 0. \quad (4.50)$$

В системе Брейта квадрат переданного импульса имеет вид:

$$-Q^2 = (P_\mu - P'_\mu)(P^\mu - P'^\mu) = s + s' - 2P_0P'_0 - 2q^2. \quad (4.51)$$

Подставляя (4.51) в (4.50), получим:

$$g_2(s, Q^2, s') = \frac{s - s'}{Q^2} g_1(s, Q^2, s'). \quad (4.52)$$

Подставим (4.52) в (4.47):

$$\begin{aligned} Q^2(P + P')_\mu g_1(s, Q^2, s') + (P - P')_\mu (s - s') g_1(s, Q^2, s') &= A_\mu(s, Q^2, s') g_1(s, Q^2, s') Q^2, \\ P_\mu Q^2 + P'_\mu Q^2 + P_\mu s - P'_\mu s - P_\mu s' + P'_\mu s' &= A_\mu(s, Q^2, s') Q^2, \\ A_\mu(s, Q^2, s') &= \frac{1}{Q^2} [P_\mu (s - s' + Q^2) + P'_\mu (s' - s + Q^2)]. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Заметим, что (4.53) идентично выражению (4.8), полученному в ЛС. Приравнявая выражения (4.3) и (4.7) и последовательно выполняя интегрирование в системе координат $\vec{q} = (0, 0, q)$,

получим аналитическое выражение для свободного двухчастичного формфактора, совпадающее с (4.9).

Вывод формулы для формфактора двухчастичной системы со взаимодействием не апеллирует к какой-либо системе отсчета, поэтому в БС и ЛС формула (4.39) имеет один и тот же вид.

Таким образом, несовпадение вычислений для формфактора в разных системах отсчета, по-видимому, связано с использованием ИП, которое нарушает лоренц-ковариантность тока и приводит к разным результатам в ЛС и в БС, тогда как используемое в работе МИП не нарушает лоренц-ковариантности тока и демонстрирует одинаковые результаты в разных системах отсчета.

4.3 Электромагнитный формфактор пиона в основных формах РКМ

Построение матричного элемента электрослабого тока системы двух не взаимодействующих фермионов

Рассмотрим сначала систему из двух не взаимодействующих частиц спина 1/2. Вектор состояния одной частицы представим в единых для основных форм динамики обозначениях следующим образом:

$$|\vec{w}^i, M, j, m\rangle, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.54)$$

где M, m, j - соответственно масса, проекция спина на ось z и спин частицы. В мгновенной форме динамики $\vec{w}^1 = \vec{p}$, в точечной - $\vec{w}^2 = \vec{v}$ и динамики на световом фронте $\vec{w}^3 = \vec{p}$ (см. (4.22)).

Для векторов состояния (4.54) примем нормировку:

$$\langle \vec{w}^i, m | \vec{w}^{i'}, m' \rangle = 2w_0^i \delta(\vec{w}^i - \vec{w}^{i'}) \delta_{mm'}. \quad (4.55)$$

Описания двухчастичной системы можно провести также в базисе с явно отделенным движением центра масс [66]:

$$|\vec{W}^i, \sqrt{s}, J, L, S, m\rangle, \quad (4.56)$$

который нормирован следующим образом:

$$\begin{aligned} & \langle \vec{W}^i, \sqrt{s}, J, L, S, m | \vec{W}^{i'}, \sqrt{s'}, J, L', S', m' \rangle = \\ & = N^i \delta(\vec{W}^i - \vec{W}^{i'}) \delta(\sqrt{s} - \sqrt{s'}) \delta_{mm'} \delta_{LL'} \delta_{SS'}. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Здесь $\vec{W}^i = \vec{w}_1^i + \vec{w}_2^i$, \sqrt{s} - инвариантная масса системы двух свободных частиц, L - орбитальный момент в СЦИ, S - суммарный спин в СЦИ, N^i - совокупность нормировочных констант в основных формах РКМ, явный вид которых в дальнейшем не используется.

Как уже отмечалось в третьей главе в составной кварковой модели пион представляется как связанное состояние u и \bar{d} кварков с квантовыми числами $J = L = S = 0$. Будем считать, что их массы одинаковы $M_u = M_{\bar{d}} = M$, тогда, матричный элемент оператора электромагнитного тока свободной двухчастичной системы с квантовыми числами пиона запишется в виде:

$$\begin{aligned} \langle \vec{W}^i, \sqrt{s}, m | j_\mu^0(0) | \vec{W}^{i'}, \sqrt{s'}, m' \rangle &= \int \frac{d^3 w_1^i}{2w_{10}^i} \int \frac{d^3 w_2^i}{2w_{20}^i} \int \frac{d^3 w_1^{i'}}{2w_{10}^{i'}} \int \frac{d^3 w_2^{i'}}{2w_{20}^{i'}} \cdot \\ &\cdot \langle \vec{W}^i, \sqrt{s}, m | \vec{w}_1^i, m_1; \vec{w}_2^i, m_2 \rangle \cdot \langle \vec{w}_1^i, m_1; \vec{w}_2^i, m_2 | j_\mu^0(0) | \vec{w}_1^{i'}, m_1'; \vec{w}_2^{i'}, m_2' \rangle \cdot \\ &\cdot \langle \vec{w}_1^{i'}, m_1'; \vec{w}_2^{i'}, m_2' | \vec{W}^{i'}, \sqrt{s'}, m' \rangle, \end{aligned} \quad (4.58)$$

где

$$\begin{aligned} \langle \vec{w}_1^i, m_1; \vec{w}_2^i, m_2 | j_\mu^0(0) | \vec{w}_1^{i'}, m_1'; \vec{w}_2^{i'}, m_2' \rangle &= \langle \vec{w}_1^i, m_1 | j_{1\mu}^0(0) | \vec{w}_1^{i'}, m_1' \rangle \cdot \\ &\cdot \delta(\vec{w}_2^i - \vec{w}_2^{i'}) \delta_{m_2 m_2'} + \langle \vec{w}_2^i, m_2 | j_{2\mu}^0(0) | \vec{w}_2^{i'}, m_2' \rangle \delta(\vec{w}_1^i - \vec{w}_1^{i'}) \delta_{m_1 m_1'}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Матричный элемент одночастичного тока параметризуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle \vec{w}_1^i, m_1 | j_{1\mu}^0(0) | \vec{w}_1^{i'}, m_1' \rangle &= \sum_{m_1''} D_{m_1 m_1''}^{1/2}(R(\vec{w}_1^i)) \langle m_1'' | [f_{10}(Q^2) K'_{1\mu} + \\ &+ i f_{30}(Q^2) R_{1\mu}] | m_1' \rangle, \end{aligned} \quad (4.60)$$

здесь величины $f_{10}(Q^2)$ и $f_{30}(Q^2)$ имеют смысл электрического и магнитного формфакторов частицы, соответственно:

$$K'_\mu = w_\mu + w'_\mu, \quad R_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} w^\nu w'^\lambda \Gamma^\rho(w'), \quad (4.61)$$

$\Gamma^\rho(w)$ - оператор релятивистского спина:

$$\Gamma^0(w^i) = (\vec{w}^i \vec{j}), \quad \vec{\Gamma}(w^i) = M \vec{j} + \frac{\vec{w}^i (\vec{w}^i \vec{j})}{w_0^i + M}, \quad \Gamma^2 = -M j^2 (j + 1). \quad (4.62)$$

Коэффициенты Клебша-Гордана определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle \vec{W}^i, \sqrt{s}, m | \vec{w}_1^i, m_1; \vec{w}_2^i, m_2 \rangle &= 2\sqrt{s} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} [\lambda(s, M_u^2, M_d^2)]^{-1/2} \cdot \langle \frac{1}{2} \tilde{m}_1 \frac{1}{2} \tilde{m}_2 | 00 \rangle \\ &\cdot 2W_0^i \delta(W^i - w_1^i - w_2^i) \cdot \sum_{\tilde{m}_1 \tilde{m}_2} D_{m_1 \tilde{m}_1}^{1/2}(R(\vec{w}_1^i)) D_{m_2 \tilde{m}_2}^{1/2}(R(\vec{w}_2^i)), \end{aligned} \quad (4.63)$$

$D_{mm'}^j$ - матрица трехмерного поворота с углами Эйлера (α, β, γ) .

Для случая частиц со спином 1/2 выражение для D - матрицы имеет вид [66]:

$$D^{1/2}(w_1^i w_2^i) = \cos \frac{\omega}{2} - 2i(\vec{k} \vec{j}) \sin \frac{\omega}{2}, \quad (4.64)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{k} &= \frac{[\vec{w}_1^i \vec{w}_2^i]}{||[\vec{w}_1^i \vec{w}_2^i]||}, \quad [j_i j_k] = i \varepsilon_{ikn} j_n, \\ \omega &= 2 \arctan \frac{||[\vec{w}_1^i \vec{w}_2^i]||}{(w_{10}^i + M_1)(w_{20}^i + M_2) - \vec{w}_1^i \vec{w}_2^i}. \end{aligned} \quad (4.65)$$

С другой стороны, в базисе (4.56) матричный элемент тока можно представить в виде:

$$\langle \vec{W}^i, \sqrt{s}, m | j_\mu^0(0) | \vec{W}^{i'}, \sqrt{s'}, m' \rangle = A_\mu^i(s, Q^2, s') G_0(s, Q^2, s'), \quad (4.66)$$

где $G_0(s, Q^2, s')$ - т.н. свободный двухчастичный формфактор, $A_\mu^i(s, Q^2, s')$ - функции, отвечающие за трансформационные свойства матричного элемента и имеющие вид:

$$\begin{aligned} A_\mu^{1,3}(s, Q^2, s') &= [W_\mu^{1,3}(s - s' + Q^2) + W_\mu'^{1,3}(s' - s + Q^2)] / Q^2, \\ A_\mu^2(s, Q^2, s') &= [V_\mu(s - s' + Q^2)\sqrt{s} + V_\mu'(s' - s + Q^2)\sqrt{s'}] / Q^2 \end{aligned} \quad (4.67)$$

Приравнивая выражения (4.58) и (4.66) с учетом (4.67) и выполняя интегрирование в системе $\vec{W}^{i'} = 0, \vec{W}^i = (0, 0, W^i)$, получим аналитическое выражение для свободного двухчастичного формфактора:

$$\begin{aligned} G_0(s, Q^2, s') &= \frac{(s + s' + Q^2)^2 Q^2 [\vartheta(s' - s_1) - \vartheta(s' - s_2)]}{2\sqrt{s - 4M^2} \sqrt{s' - 4M^2} [\lambda(s, Q^2, s')]^{3/2}} \\ &[\cos(\omega_1 + \omega_2) f_{10}(Q^2) - 2M\xi(s, s', Q^2) \sin(\omega_1 + \omega_2) f_{30}(Q^2)], \end{aligned} \quad (4.68)$$

где $f_{10}(Q^2)$ и $f_{30}(Q^2)$ имеют вид (1.90),

$$\xi(s, s', Q^2) = \sqrt{ss'Q^2 - M^2\lambda(s, -Q^2, s')},$$

$$\omega_1 = \arctan \frac{\xi(s, s', Q^2)}{M[(\sqrt{s} + \sqrt{s'})^2 + Q^2] + \sqrt{ss'}(\sqrt{s} + \sqrt{s'})},$$

$$\omega_2 = \arctan \frac{\xi(s, s', Q^2)(2M + \sqrt{s} + \sqrt{s'})}{M(s + s' + Q^2)(2M + \sqrt{s} + \sqrt{s'}) + \sqrt{ss'}(4M^2 + Q^2)},$$

$$s_{1,2} = 2M^2 + \frac{1}{2M^2}(2M^2 + Q^2)(s - 2M^2) \mp \frac{1}{2M^2} \sqrt{Q^2(Q^2 + 4M^2)s(s - 4M^2)},$$

ϑ - ступенчатая функция.

Таким образом, аналитические выражения для свободных формфакторов во всех основных формах динамики получаются одинаковыми.

Построение матричного элемента электромагнитного тока пиона в разных формах РКМ

Перейдем к рассмотрению матричного элемента тока составной системы.

Построим матричный элемент электромагнитного тока $j_{\mu c}(0)$ для системы двух кварков со взаимодействием:

$$\langle \vec{w}_c^i | j_{\mu c}(0) | \vec{w}_c^{i'} \rangle = (w_c^i + w_c^{i'})_\mu F_\pi(Q^2), \quad (4.69)$$

где \vec{w}_c^i - трехмерный вектор составной системы в основных формах динамики, $F_\pi(Q^2)$ - формфактор составной системы.

В силу того, что в РКМ вектор состояния составной двухчастичной системы принадлежит прямому произведению двух одночастичных гильбертовых пространств, матричный элемент тока (4.69) можно разложить по базису (4.56).

Воспользуемся полнотой набора двухчастичных состояний:

$$\frac{1}{N^i N^{i'}} \int d^3 \vec{W}^i \int d\sqrt{s} | \vec{W}^i, \sqrt{s} \rangle \langle \vec{W}^i, \sqrt{s} | = I. \quad (4.70)$$

В результате получим:

$$\begin{aligned} \langle \vec{w}_c^i | j_{\mu c}(0) | \vec{w}_c^{i'} \rangle &= \frac{1}{N^i N^{i'}} \int d^3 \vec{W}^i \int d^3 \vec{W}^{i'} \int d\sqrt{s} \int d\sqrt{s'} \langle \vec{w}_c^i | \vec{W}^i, \sqrt{s} \rangle \cdot \\ &\cdot \langle \vec{W}^{i'}, \sqrt{s'} | \vec{w}_c^{i'} \rangle \cdot \langle \vec{W}^i, \sqrt{s} | j_{\mu c}(0) | \vec{W}^{i'}, \sqrt{s'} \rangle, \end{aligned} \quad (4.71)$$

где $\langle \vec{w}_c^i | \vec{W}^i, \sqrt{s} \rangle$ - волновая функция в основных формах РКМ, имеющая вид:

$$\langle \vec{w}_c^i | \vec{W}^i, \sqrt{s} \rangle = N_c^i \delta(\vec{W}^i - \vec{w}_c^i) \varphi(s), \quad \varphi(s) = \sqrt[4]{sk} \psi(k). \quad (4.72)$$

Подставляя (4.72) в (4.71) и "снимая" интегрирование по переменным \vec{W}^i и $\vec{W}^{i'}$ за счет δ -функций, получим:

$$\langle \vec{w}_c^i | j_{\mu c}(0) | \vec{w}_c^{i'} \rangle = \int d\sqrt{s} \int d\sqrt{s'} \varphi(s) \varphi(s') \langle \vec{W}^i, \sqrt{s} | j_{\mu c}(0) | \vec{W}^{i'}, \sqrt{s'} \rangle. \quad (4.73)$$

Матричный элемент электромагнитного тока правой части (4.73) будем интерпретировать как обобщенную функцию, т.е. объект, имеющий смысл только под знаком интеграла. Представим матричный элемент в виде произведения гладкой ковариантной функции и инвариантной обобщенной функции:

$$\langle \vec{W}^i \sqrt{s} | j_{\mu c}(0) | \vec{W}^{i'}, \sqrt{s'} \rangle = D_\mu(s, Q^2, s') G(s, Q^2, s'), \quad (4.74)$$

где D_μ - 4-вектор, являющийся гладкой ковариантной функцией, явный вид которого пока неизвестен, $G(s, Q^2, s')$ - инвариантная обобщенная функция, содержащая информацию о процессе. Подставим представление (4.74) в (4.73):

$$\int d\sqrt{s} \int d\sqrt{s'} \varphi(s) \varphi(s') D_\mu(s, Q^2, s') G(s, Q^2, s') = (w_c^i + w_c^{i'})_\mu F_\pi(Q^2). \quad (4.75)$$

Для того, чтобы равенство (4.75) выполнялось при любой основной функции достаточно потребовать выполнения равенства:

$$D_\mu(s, Q^2, s') = (w_c^i + w_c^{i'})_\mu. \quad (4.76)$$

Выполнение этого равенства приводит к выполнению как условия лоренц-ковариантности, так и условия сохранения тока. Подставляя (4.76) в (4.75) мы получаем аналитическое выражение для формфактора составной системы:

$$F_\pi(Q^2) = \int \int d\sqrt{s} d\sqrt{s'} G(s, Q^2, s') \varphi(s) \varphi(s'), \quad (4.77)$$

где $G(s, Q^2, s')$ - формфактор составной системы.

Используя МИП, заменяем $G(s, Q^2, s')$ на свободный двухчастичный формфактор $G_0(s, Q^2, s')$, определяемый равенством (4.68) и получаем выражение:

$$F_\pi(Q^2) = \int \int d\sqrt{s} d\sqrt{s'} G_0(s, Q^2, s') \varphi(s) \varphi(s'), \quad (4.78)$$

Отметим, что аналитическое выражение (4.78) совпадает для основных форм РКМ.

4.4 Численный расчет электромагнитного формфактора и среднеквадратичного радиуса пиона

Для численного расчета формфактора пиона необходимо определить волновые функции $\varphi(s)$. Процедура вычисления волновых функций системы в РКМ сводится к диагонализации оператора массы системы взаимодействующих частиц \hat{M}_I . Для этого поставим задачу на собственные значения для оператора массы:

$$\hat{M}_I \psi = M_c \psi, \quad \hat{M}_I = \hat{M}_0 + \hat{V}, \quad (4.79)$$

\hat{M}_0 - оператор массы свободной двухчастичной системы, \hat{V} - оператор взаимодействия, M_c - масса двухчастичной системы со взаимодействием.

Будем решать задачу (4.79) вариационным методом. Для решения уравнения (4.79) вариационным методом [184] необходимо найти матричный элемент оператора массы. Соответствующий матричный элемент имеет вид:

$$M_I = \langle \vec{w}_c^i | \hat{M}_I | \vec{w}_c^i \rangle = \langle \vec{w}_c^i | \hat{M}_0 | \vec{w}_c^i \rangle + \langle \vec{w}_c^i | \hat{V} | \vec{w}_c^i \rangle. \quad (4.80)$$

Разложим матричный элемент (4.80) по базису (4.56). Учитывая, что мы рассматриваем двухчастичную систему с квантовыми числами $J = L = S = 0$, получаем:

$$\begin{aligned} M_c &= \int \frac{d^3 \vec{W}^i}{2W_0^i} \int \frac{d^3 \vec{W}^n}{2W_0^n} \int \frac{d\sqrt{s}}{N^i} \int \frac{d\sqrt{s'}}{N^n} \cdot \langle \vec{w}_c^i | \vec{W}^i, \sqrt{s} \rangle \cdot \\ &\cdot \langle \vec{W}^i, \sqrt{s} | \hat{M}_0 | \vec{W}^n, \sqrt{s'} \rangle \cdot \langle \vec{W}^n, \sqrt{s'} | \vec{w}_c^i \rangle + \int \frac{d^3 \vec{W}^i}{2W_0^i} \int \frac{d^3 \vec{W}^n}{2W_0^n} \int \frac{d\sqrt{s}}{N^i} \cdot \\ &\cdot \int \frac{d\sqrt{s'}}{N^n} \cdot \langle \vec{w}_c^i | \vec{W}^i, \sqrt{s} \rangle \cdot \langle \vec{W}^i, \sqrt{s} | \hat{V} | \vec{W}^n, \sqrt{s'} \rangle \cdot \langle \vec{W}^n, \sqrt{s'} | \vec{w}_c^i \rangle. \quad (4.81) \end{aligned}$$

Рассмотрим первое слагаемое в (4.81). Учитывая, что оператор \hat{M}_0 при действии на базис (4.56) дает значение полной энергии свободной двухчастичной системы, получим:

$$\begin{aligned} \langle \vec{w}_c^i | \hat{M}_0 | \vec{w}_c^i \rangle &= \int \frac{d^3 \vec{W}^i}{2W_0^i} \int \frac{d^3 \vec{W}^{\prime i}}{2W_0^{\prime i}} \int \frac{d\sqrt{s}}{N^i} \int \frac{d\sqrt{s'}}{N^{\prime i}} \cdot \langle \vec{w}_c^i | \vec{W}^i, \sqrt{s} \rangle \cdot \\ &\cdot M_0 \langle \vec{W}^i, \sqrt{s} | \vec{W}^{\prime i}, \sqrt{s'} \rangle \cdot \langle \vec{W}^{\prime i}, \sqrt{s'} | \vec{w}_c^i \rangle . \end{aligned} \quad (4.82)$$

Расписывая собственное значение энергии системы двух свободных частиц, получаем для (4.82) с учетом вида волновых функций (4.72) следующее представление для матричного элемента:

$$\langle \vec{w}_c^i | \hat{M}_0 | \vec{w}_c^i \rangle = \int d\sqrt{s} \varphi^*(s) \frac{N_c^i N_c^{\prime i}}{N^i N^{\prime i}} \left[\sqrt{k^2 + M^2} + \sqrt{k'^2 + M^2} \right] \varphi(s) , \quad (4.83)$$

где M - масса конститuentного кварка.

В терминах переменной k выражение (4.83) преобразуется к виду:

$$\langle \vec{w}_c^i | \hat{M}_0 | \vec{w}_c^i \rangle = \int k^2 dk |\psi(k)|^2 \left[\sqrt{k^2 + M^2} + \sqrt{k^2 + M^2} \right] . \quad (4.84)$$

Второе слагаемое, входящее в матричный элемент (4.81), описывает вклад взаимодействия в массу составной системы. Разложение второго слагаемого по базису (4.56) с учетом (4.72) в терминах переменной k имеет вид:

$$\langle \vec{w}_c^i | \hat{V} | \vec{w}_c^i \rangle = \int \int k k' dk dk' \psi(k) V(k, k') \psi(k') . \quad (4.85)$$

В качестве потенциала взаимодействия в диссертационной работе используется межкварковый потенциал (см., например, [185, 186]), который в случае псевдоскалярных и векторных мезонов представляет сумму кулоновской, запирающей и спин-спиновой частей:

$$\begin{aligned} \hat{V}(r) &= -\frac{4\alpha}{3r} + \sigma r \left[\frac{\exp(-\beta^2 r^2)}{\sqrt{\pi} \beta r} + \left(1 + \frac{1}{2\beta^2 r^2}\right) \text{erf}(\beta r) \right] + w_0 - \\ &- \frac{32 \vec{S}_q \vec{S}_Q}{9 \sqrt{\pi} m_q m_Q} \sum_{k=1}^7 a_k \tau_k^3 \exp(-\tau_k^2 r^2) , \end{aligned} \quad (4.86)$$

здесь α - константа связи КХД [185]–[186]; $erf(x)$ -функция ошибок, $S_{q,Q}$ - операторы спинов кварков; $m_{q,Q}$ - массы кварков; τ_k определяется из соотношения:

$$\frac{1}{\tau_k^2} = \frac{1}{\gamma_k^2} + \frac{1}{\beta^2}.$$

Поскольку оператор взаимодействия, используемый в данной работе, записан в координатном представлении, перепишем (4.85) также в координатном представлении. Используем тот факт, что волновая функция основного состояния в импульсном представлении связана с волновой функцией в координатном представлении при помощи преобразования Фурье-Бесселя:

$$\psi(k) = \int \sqrt{\frac{2}{\pi}} r^2 j_0(kr) \psi(r) dr, \quad j_0(kr) = \frac{\sin(kr)}{kr}. \quad (4.87)$$

С помощью формулы (4.87) перепишем (4.85) в координатном представлении:

$$\begin{aligned} \langle \vec{w}_c^i | \hat{V} | \vec{w}_c^i \rangle &= \int \sqrt{\frac{2}{\pi}} r^2 \psi(r) r'^2 \psi(r') V(r'') dr dr' r''^2 dr'' \cdot \\ &\cdot k k' dk dk' j_0(kr) j_0(k'r') j_0(kr'') j_0(k'r''). \end{aligned} \quad (4.88)$$

Интегралы по импульсным переменным имеют вид:

$$\int \sqrt{\frac{2}{\pi}} k k' dk dk' j_0(kr) j_0(k'r') j_0(kr'') j_0(k'r'') = \frac{1}{r r''} \delta(r - r'') \frac{1}{r''^2} \delta(r' - r''). \quad (4.89)$$

С учетом (4.88)–(4.89) получаем:

$$\langle \vec{w}_c^i | \hat{V} | \vec{w}_c^i \rangle = \int V(r) r^2 |\psi(r)|^2 dr. \quad (4.90)$$

Подставляя (4.84) и (4.90) в (4.81), получаем окончательное выражение для матричного элемента:

$$M_c = \int k^2 dk |\psi(k)|^2 \left[\sqrt{k^2 + M^2} + \sqrt{k^2 + M^2} \right] + \int V(r) r^2 |\psi(r)|^2 dr. \quad (4.91)$$

Вычисленный матричный элемент (4.91) является функцией от параметров потенциала [185, 186] и параметров волновой функции ψ .

В диссертационной работе в качестве пробной функции используется волновая функция основного состояния гармонического осциллятора, представляемая в координатном и импульсном представлении в виде:

$$\psi(k) = \frac{2}{\pi^{1/4} b^{3/2}} \exp\left(-\frac{k^2}{2b^2}\right), \quad \psi(r) = \frac{2b^{3/2}}{\pi^{1/4}} \exp\left(-\frac{r^2 b^2}{2}\right), \quad (4.92)$$

где b - параметр пробной функции.

Параметр b определяется из условия минимума функционала (4.91):

$$\frac{dM_c}{db} = 0, \quad \frac{d^2 M_c}{db^2} > 0. \quad (4.93)$$

Массы кварков в (4.91) одинаковые: $M = 0.25 \text{ GeV}$.

Решение уравнения (4.93) дает значение параметра $b = 0.3286 \text{ GeV}$.

Для расчета электромагнитного формфактора пиона (4.78) представим саксовские формфакторы в (4.68) в виде (2.45)–(2.47).

Результаты расчета пионного формфактора (4.78) для волновой функции (2.48), полученной вариационным методом, представлены на рисунке 4.1.

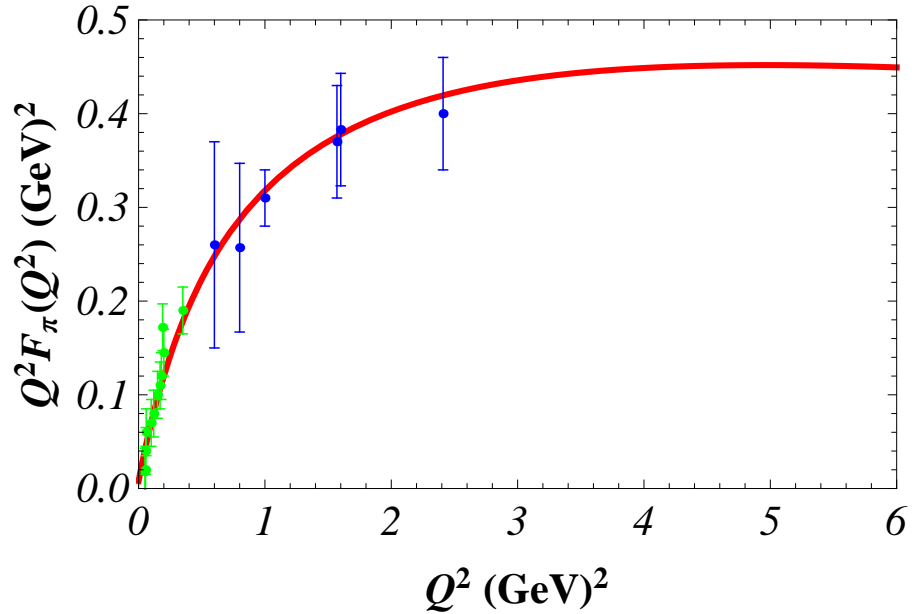


Рис. 4.1: Результаты расчета пионного формфактора (4.78) для волновой функции (2.48). Экспериментальные данные, обозначенные синими точками взяты из [10], а зелеными - из [187].

Из Рис. 4.1 видно, что теоретические расчеты электромагнитного формфактора пиона хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Вычислим теперь среднеквадратичный радиус пиона.

Следуя работе [105] будем вычислять среднеквадратичный радиус пиона по следующей формуле:

$$\langle r_\pi^2 \rangle = -6 \frac{dF_\pi(Q^2)}{dQ^2} \Big|_{Q^2 \rightarrow 0}. \quad (4.94)$$

Подставляя формулу (4.78) в (4.94), получим значение среднеквадратичного радиуса пиона:

$$\langle r_\pi^2 \rangle^{1/2} = 0.644 \text{ fm}. \quad (4.95)$$

Экспериментальное значение среднеквадратичного радиуса пиона равно [85]:

$$\langle r_{\pi(exp)}^2 \rangle^{1/2} = 0.672 \pm 0.008 \text{ fm}. \quad (4.96)$$

Результаты расчета среднеквадратичного радиуса пиона отличаются от эксперимента на четыре стандартных отклонения. Точность результатов можно повысить, используя более сложную пробную функцию. Однако, точное описание среднеквадратичного радиуса пиона не является главной задачей данного параграфа. Основным результатом является то, что на примере расчета электромагнитного формфактора и среднеквадратичного радиуса пиона получены одинаковые результаты для основных форм РКМ.

Таким образом, показана эквивалентность основных форм РКМ при вычислении электромагнитного формфактора пиона при использовании процедуры параметризации матричного элемента электрослабого тока в рамках модифицированного импульсного приближения.

Заключение

Диссертационная работа посвящена проблеме релятивистского описания составных систем в ядерной физике и физике частиц. В работе развивается один из наиболее распространенных вариантов релятивистской составной модели — релятивистская квантовая механика с фиксированным числом частиц (РКМ), называемая также Пуанкаре-инвариантной квантовой механикой.

Центральным пунктом развиваемого подхода является построение операторов токов для составных систем. В диссертационной работе в рамках мгновенной формы РКМ разработана процедура построения матричных элементов электрослабых токов, недиагональных по полному угловому моменту. Расчеты электрослабых свойств составных кварковых систем проводились в рамках естественного для составных моделей импульсного приближения (ИП). В диссертации используется т.н. релятивистское модифицированное импульсное приближение (МИП), сформулированное в терминах приведенных матричных элементов - формфакторов. В отличие от ИП МИП не приводит к нарушению условия лоренц-ковариантности оператора тока, а в случае электромагнитного тока - закона сохранения. Кроме того, подход дает однозначное описание формфакторов системы со спином, не оперируя понятиями "хороших" и "плохих" компонент тока, а также имеет естественный и правильный нерелятивистский предел. Развитый в диссертации метод построения матричных элементов токов применен для вычисления константы лептонного распада ρ -мезона, расчета переходного формфактора в распаде $\rho \rightarrow \pi\gamma^*$ и соответствующего магнитного момента перехода, а также среднеквадратичного радиуса ρ -мезона. Результаты расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Приведем основные результаты, полученные в диссертации:

1. В рамках мгновенной формы РКМ разработана процедура

параметризации матричного элемента электрослабого тока, недиагонального по полному угловому моменту.

2. С использованием разработанной методики проведено описание константы лептонного распада ρ -мезона. Результаты вычислений согласуются с теоретическими вычислениями данной константы в других подходах.

3. Произведен расчет среднеквадратичного радиуса ρ -мезона при фиксированных параметрах модели. Результаты расчета удовлетворяют гипотезе о равенстве зарядовых и сильных радиусов, подтвержденной для ряда адронов.

4. Проведена оценка параметров составной кварковой модели из анализа электрослабых характеристик π - и ρ -мезонов. Получено хорошее описание электрослабых характеристик π - и ρ -мезонов при одинаковых параметрах конститuentных кварков.

5. В рамках развитой методики получены аналитические выражения и численные значения для переходного формфактора $F_{\pi\rho}(Q^2)$ и соответствующего магнитного момента перехода $\mu_{\pi\rho}$ в распаде $\rho \rightarrow \pi\gamma^*$.

6. Показана эквивалентность трех основных форм РКМ на примере описания электромагнитного формфактора пиона. Получены одинаковые аналитические выражения для электромагнитного формфактора пиона в рамках трех основных форм РКМ.

В заключении я приношу глубокую благодарность моим научным руководителям Крутову Александру Федоровичу и Троицкому Вадиму Евгеньевичу за постановку задачи, постоянную поддержку и помощь в работе.

Выражаю благодарность сотрудникам кафедры общей и теоретической физики Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева и отдельно заведующему кафедрой Бирюкову Александру Александровичу за создание на кафедре доброжелательной и творческой обстановки.

Литература

- [1] Arnaldi R. et.al. (NA60 Collaboration). Study of the electromagnetic transition form-factors in $\eta \rightarrow \mu^+ \mu^- \gamma$ and $\omega \rightarrow \mu^+ \mu^- \pi^0$ decays with NA60//Phys.Lett.B.-2009.-V.677.-P.260-266.
- [2] Usai G. et.al.(NA60 Collaboration). Low mass dimuon production in proton-nucleus collisions at 400 GeV/c//Nucl.Phys.A.-2011.-V.855.-P.189-196.
- [3] Uras A. et.al. (NA60 Collaboration). Measurement of the η and ω Dalitz decays transition form factors in p-A collisions at 400 GeV/c with the NA60 apparatus//Phys.Conf.Ser.-2011.-V.270.-P.1-4.
- [4] Archilli F. et.al. (KLOE-2 Collaboration). Search for a vector gauge boson in ϕ meson decays with the KLOE detector//arXiv:1110.0411[hep-ph].-2011.-P.1-12.
- [5] Airapetian A. et.al. (HERMES Collaboration). Transverse-target-spin asymmetry in exclusive ω -meson electroproduction //arXiv:1508.07612[hep-ph].-2015.-P.1-9.
- [6] Nefkens B.M.K. et.al. (A2 Collaboration at MAMI). A new measurement of the rare decay $\eta \rightarrow \pi^0 \gamma \gamma$ with the Crystal Ball/TAPS detector at the Mainz Microtron//arXiv:1405.4904v1[hep-ph].-2014.-P.1-10.
- [7] Fedorov G.V. et.al. (JLab and CLAS Collaboration). Electroproduction of $p\pi^+\pi^-$ of protons at $0.2 \text{ GeV}^2 < Q^2 < 0.6 \text{ GeV}^2$ and $1.3 \text{ GeV} < W < 1.57 \text{ GeV}$ //Phys.Rev.C.-2009.-V.79.-015204.
- [8] Bedlinskiy I. et.al.(JLab Collaboration and CLAS). Exclusive π^0 electroproduction at $W > 2 \text{ GeV}$ with CLAS//arXiv:1405.0988v1[hep-ph].-2014.-P.1-28.
- [9] Blok H.P. et.al. The Jefferson Lab F_π Collaboration//Phys.Rev.C.-2008.-V.78.-045202.

- [10] Hubert G.M. et.al. The Jefferson Lab F_π Collaboration//Phys.Rev.C.-2008.-V.78.-045203.
- [11] Arrington J. How will do we know the electromagnetic form factor of the proton//Phys.Rev.C.-2003.- V.65.-034325.
- [12] Arrington J. Precision Rosenbluth measurement of the proton elastic form factors//Phys.Rev.Lett.-2005.- V.94.-142301.
- [13] Aubert B. et.al. (Babar Collaboration). Measurement of the $\gamma\gamma^* \rightarrow \eta$ transition form factor at $Q^2 = 112 \text{ GeV}^2$ //Phys.Rev.D.-2006.-V.74.-012002.
- [14] Aubert B. et.al. (Babar Collaboration). Measurement of the $\gamma\gamma^* \rightarrow \pi^0$ transition form factor//Phys.Rev.D.-2009.-V.80.-052002.
- [15] Lees J.P. et.al. (Babar Collaboration). A measurement of the semileptonic branching fraction of the B_s meson//Phys.Rev.D.-2012.-V.85.-011101.
- [16] Aaij R. et.al. (LHCb Collaboration). First observation on $B_s \rightarrow D_s^{**} X \mu \nu$ decays//Phys.Lett.B.-2011.-V.698.-P.14–20.
- [17] Aaij R. et.al. (LHCb Collaboration). Measurement of the branching fraction of $B^+ \rightarrow p \bar{p} K^+$ decays//Eur.Phys.J.C.-2013.-V.73.-2462.
- [18] Aaij R. et.al. (LHCb Collaboration). Study of $B^0 \rightarrow D^{*-} \pi^+ \pi^- \pi^+$ and $B^0 \rightarrow D^{*-} K^+ \pi^- \pi^+$ decays//Phys.Rev.D.-2013.-V.87.-092001.
- [19] Aaij R. et.al. (LHCb Collaboration). Search for CP-violation in $D^+ \rightarrow K \pi^+$ and $D_s^+ \rightarrow K_s \pi^+$ decays//JHEP.-2013.-V.6.-P.1-19.
- [20] Aaij R. et.al. (LHCb Collaboration). Amplitude analysis and branching fraction measurement of $B_s \rightarrow J/\Psi K^+ K^-$ //Phys.Rev.D.-2013.-V.87.-072004.
- [21] Olive K.A. et.al. (Particle Data Group). Review of Particle Physics //Chin.Phys.C -2014.-V.38.-090001.
- [22] Yao W.N. et.al. (Particle Data Group). Review of Particle Physics // J.Phys.G -2006.-V.33.-1232 P.
- [23] Окунь Л.Б. Лептоны и кварки//М.:Наука.Гл.ред.физ.мат.лит.-1990.-346С.

- [24] Хелзен Ф., Мартин А.Д. Кварки и лептоны//Новосибирск: ИОНФИ.-2000.-724С.
- [25] Battaglia M. et.al. Determination of $|V_{ub}|$ with inclusive techniques at LEP//Nucl.Phys.Proc.Supple.-2001.-V.93.-P.291-303.
- [26] Gross F., Van Orden J. W., Holinde K. Relativistic one-boson-exchange model for the nucleon-nucleon interaction// Phys.Rev.C.-1992.-V.45.-P.2094–2132.
- [27] Faustov R.N., Galkin V.O. Rare $B \rightarrow \pi l \bar{l}$ and $B \rightarrow \rho l \bar{l}$ decays in the relativistic quark model//Eur.Phys.J.C.-2014.-V.74.-P.2911.
- [28] Hedditch J.N., Kamleh W., Lasscock B.G., Leinweber D.B., Williams A.G., Zanotti J.M. Pseudoscalar and vector meson form factors from lattice QCD//Phys.Rev.D.-2007.-V.75.-094504.
- [29] Frederico T., Pace E., Rasquini B., Salme G. Pion generalized parton distribution with covariant light-front constituent quark models//Phys.Rev.D.-2009.-V.80.-054021.
- [30] Roberts H.L., Roberts C.D., Bashir A., Gutierrez-Guerrero L.X., Tandy P.S. Abelian anomaly and neutral pion production// Phys.Rev.C.-2010.-V.82.-065202.
- [31] Lucha W., Melikhov D., Simula S. Decay constants of heavy pseudoscalar mesons from QCD sum rules//J.Phys.G.-2011.-V.38.-105002.
- [32] Pervushin V., Shilin V. Chiral phenomenological relations between rates of rare radiative decay of kaon to pion and leptons and the meson formfactors//Phys.Part.Nucl.Lett.-2011.-P.13-18.
- [33] Garcia Gudino D. Toledo Sanchez G. The $\omega\rho\pi$ coupling in the VMD model revisited//Mod.Phys.A.-2012.-V.27.-1250101.
- [34] Kampf K. ChPT calculations of pion formfactors//arXiv:1209.2902[hep-ph]-2012.-P.1-4.
- [35] Achasov N.N., Kozhevnikov A.A. Pion form factor in the range $-10 \text{ GeV}^2 < s < 1 \text{ GeV}^2$ // JETP.-2012.-V.96.-P.627-631.

- [36] Achasov N.N., Kozhevnikov A.A. Pion form factor and reaction $e^+e^- \rightarrow \omega\pi^0$ and $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ at energies up to 2-3 GeV in the many-channel approach//Phys.Rev.D.-2013.-V.88.-093002.
- [37] Dorokhov A.E., Kuraev E.A. Pion transition form factor in the constituent quark model//Phys.Rev.D.-2013.-V.88.-014038.
- [38] Ebert D., Faustov R.N., Galkin V.O. Masses and electroweak properties of light mesons in the relativistic quark model//Eur.Phys.J.C.-2006.-V.47.-P.745-755; arXiv:0511029[hep-ph].
- [39] Faustov R.N., Galkin V.O. Strange baryon spectroscopy in the relativistic quark model//Phys.Rev.D.-2015.-V.92.-054005.
- [40] Faustov R.N., Galkin V.O. Exclusive weak B decays involving τ lepton in the relativistic quark model//Mod.Phys.Lett.A.-2012.-V.27.-1250183.
- [41] Ebert D., Faustov R.N., Galkin V.O. Rare semileptonic decays of B and B_c mesons in the relativistic quark model//Phys.Rev.D.-2010.-V.82.-034032.
- [42] Bekzhanov A. V., Bondarenko S. G., Burov V. V. Nucleon form factors for the elastic electron-deuteron scattering at high momentum transfer//JETP.Lett.-2014.-V.99.-P.715-720.
- [43] Bondarenko S. G., Burov V. V., Rogochaya E. P. Final state interaction effects in electrodisintegration of the deuteron within the Bethe-Salpeter approach //JETP.Lett.-2011.-V.94.-P.800-805.
- [44] Bondarenko S. G., Burov V. V., Pauchy Hwang W.-Y., Rogochaya E. P. One-rank interaction kernel of the two-nucleon system for medium and high energies //JETP.Lett.-2008.-V.87.-P.753-758.
- [45] Logunov A.A., Tavkhelidze A.N. Quasi-optical approach in quantum field theory // Nuovo Cim. - 1963.-V.29.- P.380-399., Blankenbecler R., Sugar R. Linear integral equations for relativistic multichannel scattering // Phys.Rev.-1966.-V.142.- P.1051-1059.
- [46] Phillips D.R., Wallace S.J., Divine N.K. Electron-deuteron scattering in a current-conserving description of relativistic bound states: formalism and impulse-approximation calculations // Phys.Rev.C.-1998.-V.58.-P.2261-2282.

- [47] Mandelzweig V. B., Wallace S.J. QED based two-body Dirac equation// Phys.Lett.B.-1987.-V.197.- P.469–473, Wallace S.J., Mandelzweig V. B. Covariant two-body equations for scalar and Dirac particles// Nucl.Phys.A.- 1989.-V.503.- P.673-693.
- [48] Andrianov A.A., Afonin S.S., Espriu D. The masses of vector mesons in holographic QCD at finite chiral chemical potential//Phys.Lett.B.-2015.-V.745.-P.52-55.
- [49] Andrianov A.A., Planells X., Espriu D. Chemical potentials and parity breaking: the Nambu-Jona-Lasinio model//Eur.Phys.J.C.-2014.-V.74.-P.2776.
- [50] Андрианов А.А., Андрианов В.А. Калибровочная модель Намбу-Йона-Лазинио как низкоэнергетическое приближение КХД//ТМФ.-1992.-Т.93.-С.67-86.
- [51] Vishneva A.V., Volkov M.K. Radiative decays of radially excited pseudoscalar meson in the extended Nambu-Jona-Lasinio model// arXiv:1312.1470v2[hep-ph].-2013.-P.1-6.
- [52] Keister B.D., Polyzou W.N. Relativistic Hamiltonian dynamics in nuclear and particle physics//Adv.Nucl.Phys.-1991.-V.20.-P.225-479.
- [53] Dirac P.A.M. Forms of relativistic dynamics//Rev.Mod.Phys.-1949.-V.21.-P.392-399.
- [54] Polyzou W.N. Comment on the equivalence of Bakamjian-Thomas mass operators in different forms of dynamics//Phys.Rev.C.2010.-V.82.-064001.
- [55] Jun He, Julia-Diaz B., Dong Y.B. Electroweak properties of the π , K and $K^*(892)$ in the three forms of relativistic kinematics//Eur.Phys.J.-2005.-V.24.-P.1-9.
- [56] Jun He, Julia-Diaz B., Dong Y.B. Electromagnetic form factors of pion and rho in the three forms of relativistic kinematics//Phys.Lett.B.-2004.-V.602.-P.212-217.
- [57] Берестецкий В. Б., Терентьев М. В. Динамика светового фронта и нуклоны из релятивистских кварков//Ядерная физика.-1977.-Т.25.-С.653-665.

- [58] Соколов С.Н. Физическая эквивалентность точечной и мгновенной форм релятивистской динамики//ТМФ.-1975.-Т.24.-С.236-241.
- [59] Соколов С.Н., Шатний А.Н. Физическая эквивалентность трех форм релятивистской динамики и сложение взаимодействий во фронтальной и мгновенной формах//ТМФ.-1978.-Т.37.-С.291-304.
- [60] Krutov A.F., Troitsky V.E. Relativistic Instant-Form approach to the structure of two body composite systems//Phys.Rev.C.-2002.-V.65.-045501; arXiv:0101327[hep-ph].
- [61] Krutov A.F., Troitsky V.E. Relativistic Instant-Form approach to the structure of two body composite systems. Nonzero spin//Phys.Rev.C.-2003.-V.68.-018501; arXiv:0210046[hep-ph].
- [62] Чешков А.А., Широков Ю.М. Инвариантная параметризация локальных операторов//ЖЭТФ.- 1963.-Т. 44.-С.1983 - 1992.
- [63] Крутов А.Ф., Троицкий В.Е. Мгновенная форма Пуанкаре-инвариантной квантовой механики и описание структуры составных систем//ФЭЧАЯ.-2009.-Т.40.-С.269 - 319.
- [64] Krutov A.F., Polezhaev R.G., Troitsky V.E. Radius of the ρ meson determined from its decay constant // Phys.Rev.D.-2016.-V.93.-036007; arxiv:1602.00907[hep-ph].
- [65] Крутов А.Ф., Полежаев Р.Г. Построение оператора электромагнитного тока в разных формах Пуанкаре-инвариантной квантовой механики//Вестник СамГТУ.-2013.-Т.31.-С.243-249.
- [66] Крутов А.Ф., Полежаев Р.Г. Описание электромагнитной структуры пиона в различных формах Пуанкаре-инвариантной квантовой механики//Ядерная физика и инжиниринг.- 2013.-Т.4.-С.848-852.
- [67] Krutov A.F., Polezhaev R.G. The construction of the electromagnetic current operator for the process of decay of the rho-meson in the instant form of the Poincare-invariant quantum mechanics// Proceeding of Science.-2014.-V.67.-P.1-8.
- [68] Крутов А.Ф., Полежаев Р.Г. Описание радиационных распадов $V \rightarrow P\gamma^*$ в различных формах Пуанкаре-инвариантной квантовой механики//Вестник СамГТУ.-2015.-Т.19.-С.1-11.

- [69] Крутов А.Ф., Полежаев Р.Г., Троицкий В.Е. Описание радиационных распадов в рамках мгновенной формы Релятивистской квантовой механики //ТМФ.-2015.-Т.184.-С.290-306.
- [70] Крутов А.Ф., Полежаев Р.Г. Электромагнитный формфактор пиона в разных формах динамики//Теоретическая физика.-2011.-Т.12.-С.50-62.
- [71] Крутов А.Ф., Полежаев Р.Г. Построение оператора электромагнитного тока в брейтовской системе отсчета//Теоретическая физика. -2011.-Т.12.-С.63-68.
- [72] Крутов А.Ф., Полежаев Р.Г. Недиагональная параметризация матричного элемента электромагнитного тока в мгновенной форме Пуанкаре-инвариантной квантовой механики//Теоретическая физика.-2012.-Т.13.-С.77-82.
- [73] Крутов А.Ф., Полежаев Р.Г. Расчет переходного формфактора $F_{\rho \rightarrow \pi \gamma^*}(Q^2)$ в мгновенной форме Пуанкаре-инвариантной квантовой механики//Теоретическая физика.-2013.-Т.14.-С.19-33.
- [74] Крутов А.Ф., Полежаев Р.Г. Описание электромагнитной структуры пиона//Тезисы докладов международной сессии-конференции секции ядерной физики ОФНРАН "Физика фундаментальных взаимодействий".-2012.-С.114-115.
- [75] Крутов А.Ф., Полежаев Р.Г. Формфактор пиона// Третья международная конференция "Математическая физика и ее приложения".-2012.-С.177.
- [76] Крутов А.Ф., Полежаев Р.Г. Описание радиационных распадов $V \rightarrow P\gamma^*$ в разных формах Пуанкаре-инвариантной квантовой механики//Четвертая международная конференция "Математическая физика и ее приложения".-2014.-С.210.
- [77] Krutov A.F., Polezhaev R.G., Troitsky V.E. Static electromagnetic moments and lepton decay constant of the ρ -meson in the instant form of relativistic quantum mechanics//arXiv:1512.07200[hep-ph].-2015.-P.1-9.
- [78] Krutov A.F., Polezhaev R.G., Troitsky V.E. Radiative decays $V \rightarrow P\gamma^*$ in the instant form of relativistic quantum mechanics//arXiv:1601.02678[hep-ph].-2016.-P.1-9.

- [79] Jaus W. Consistent treatment of spin-1 mesons in the light-front quark model, *Phys.Rev.D.*-2003.-V.67.-094010;arXiv:0212098v3[hep-ph].
- [80] Андреев В.В. Область константы КХД ниже 1 ГэВ в Пуанкаре-ковариантной модели, //Письма в ЭЧАЯ.-2011.-Т.8.-С.581-596.
- [81] Wu T, Yang C.N. Some speculations concerning high-energy large momentum transfer processes// *Phys.Rev.B.*-1965.-V.137.-P.708-711.
- [82] Povh B, Hiifner J. Geometric interpretation of hadron-proton total cross sections and a determination of hadronic radii// *Phys.Rev.Lett.*-1987.-V.58.-P.1612-1615.
- [83] Povh B, Hiifner J. Systematics of strong interaction radii for hadrons// *Phys.Lett.B.*-1990.-V.245.-P.653-657.
- [84] Desplanques B. *PS*-mesons form factors in relativistic quantum mechanics and constraints from covariant space-time translation //arXiv:1012.2311v1[hep-ph].-2010.-P.1-6.
- [85] Haber H.E., Nakamura K.et al. (Particle Data Group Collaboration). Review of Particle Physics//*J.Phys.G.*-2010.-V.37.-075021.
- [86] Новожилов Ю.В. Введение в теорию элементарных частиц//М.: Наука.-1972.- 472 С.
- [87] Gilman R., Gross F. Electromagnetic structure deuteron//*Phys.Rev.G.*-2002.-V.28.-P.37-116.
- [88] Эллиот Д., Добер П. Симметрия в физике. Том второй//М.: Мир.-1980.- 416 С.
- [89] Tandy P.C. DSE perspective on QCD modelling distribution amplitudes and form-factors//*Few.Body Syst.*-2014.-V.55.-P.357-365.
- [90] Melo C.S., Cruz Filho G.P., da Silva E.O., Bennich B., Filho V.S. Electromagnetic structure of the pion//arXiv:1208.2021v2 [hep-ph]-2013.-P.1-4.
- [91] Aznauryan I.G., Burkert V.D. Nucleon electromagnetic form factor and electroexcitation of low lying nucleon resonances in a light-front relativistic quark model//*Phys.Rev.C.*-2012.-V.85.-055202.

- [92] Leitner O., Mathiot J.F., Tsirova N.A. The pion wave function in covariant light-front dynamics//Eur.Phys.J.-2011.-V.47.-11017.
- [93] Frederico T., Adnei Marinko J., Pace E, Salme G. Elastic electron-deuteron scattering and two-body current operators in the light-front Hamiltonian dynamics//PoSLC011.-2010.-P.1-11.
- [94] Miller G.A., Machleidt R. Light front theory of nuclear matter//Phys.Lett.B.-1999.-V.445.-P.19-24.
- [95] Lev F.M., Pace E., Salme G. Electromagnetic and weak current operators for interacting systems within the front-form dynamics//Nucl.Phys.A.-1998.-V.641.-P.229-259.
- [96] Cardarelli F., Grach I.L., Narodetskii I.M., Pace E., Salme G., Simula S. Charge form factor of π and K mesons//Phys.Rev.D.-1996.-V.53.-P.6682-6685.
- [97] Cardarelli F., Grach I.L., Narodetskii I.M., Salme G., Simula S. Electromagnetic form factors of the ρ meson in a light-front constituent quark model//Phys.Lett. B.-1995.-V.349.-P.393-399.
- [98] Cardarelli F., Grach I.L., Narodetskii I.M., Pace E., Salme G., Simula S. Hard constituent quarks and electroweak properties of pseudoscalar mesons//Phys.Lett.B.-1994.-V.332.-P.1-7.
- [99] Bo-Qiang Ma. Spin structure of the pion in a light-cone representation//Z.Phys.A.-1993.-V.345.-P.321-325.
- [100] Karmanov V.A., Smirnov A.V. Electromagnetic form factors in the light front dynamics//Nucl.Phys.A.-1992.-V.546.-P.681-717.
- [101] Карманов В.А. Релятивистские составные системы в динамике на световом фронте//ЭЧАЯ.-1988.-Т.19.-С.525-578.
- [102] Keister B.D. Rotation covariance and light-front current matrix element//Phys.Rev.D.-1984.-V.49.-P.1500-1505.
- [103] Troitsky S.V., Troitsky V.E. Transition from a relativistic constituent-quark model to the quantum-chromodynamical asymptotics: a quantitative description of the pion electromagnetic form factor at intermediate values of the momentum transfer//Phys.Rev.D.-2013.-V.88.-093005.

- [104] Alba D., Grater H., Lusanna L. Relativistic quantum mechanics and relativistic entanglement in the rest-frame instant form of dynamics//J.Math.Phys.-2011.-V.52.-062301.
- [105] Krutov A.F., Troitsky V.E., Tsirova N.A. Nonperturbative relativistic approach to pion form factor: predictions for future JLab experiments// Phys.Rev.C.-2009.-V.80.-055210.
- [106] Geramb H.V., Davaadorj B.,Wirsching S. Relativistic nucleon-nucleon potentials using Diracs constraint instant form of dynamics//arXiv: 0308004[nucl-th].-2003.-P.1-20.
- [107] Крутов А.Ф., Троицкий В.Е. Релятивистские эффекты в электромагнитной структуре ρ -мезона//Вестник СамГУ-Естественнонаучная серия.-2003.-С.95-111.
- [108] Кожевников, В.П.,Троицкий, В.Е.,Трубников, С.В, Широков, Ю.М. О связи формфакторов дейтрона с физической S матрицей I //ТМФ.-1972.-Т.10.-С.47-57.
- [109] Biernat E.P., Klink W.H., Schweiger W. A relativistic coupled-channel formalism for electromagnetic form factors of two-body bound states//Few Body.Syst.-2011.-V.50.-P.435-437.
- [110] Андреев В.В., Крутов А.Ф. Электромагнитные формфакторы псевдоскалярных мезонов// Вестник СамГУ-Естественнонаучная серия.- 2011.-Т.83.-С.148-163.
- [111] Bierrat E.P., Klink W.H., Fuchsberger K, Schweiger W. Electromagnetic meson form factor from a relativistic coupled-channell approach//Phys. Rev.C.-2009.-V.79.-055203.
- [112] Klink W.H. Point form quantum field theory on velocity grids I: bosonic contractions//arXiv:0801.4039 [nucl-th]-2008.-P.1-25.
- [113] Cirlanda L. Klink W.H., Viviani M. Baramjian-Thomas mass operator for the few-nucleon system from chiral dynamics//Phys.Rev.C.-2007.-V.76.-044002.
- [114] Krassnigg A., Klink W.H., Schweiger W. Vector mesons in a relativistic point-form approach//Phys. Rev.C.-2003.-V.67.-064003.

- [115] Alen T.W., Klink W.H., Polyzou W.N. Point-form analysis of elastic deuteron form factors//Phys.Rev.C.-2001.-V.63.-034002.
- [116] Андреев В.В., Сосновский А.В. Точечная форма РГД и электромагнитный радиус пиона// Проблемы взаимодействия излучения с веществом.-2001.-Т.8.-Р.8-12.
- [117] Alen T.W., Klink W.H. Point form relativistic quantum mechanics and electromagnetic form factors//Phys.Rev.C.-1998.-V.58.-P.3658-3604.
- [118] Alen T.W., Klink W.H. Pion charge form factor in point form relativistic dynamics//Phys.Rev.C.-1998.-V.58.-P.3670-3673.
- [119] Bakamjian B., Thomas L.H.// Relativistic particle dynamics.II // Phys.Rev.-1953.-V.92.-P.1300–1310.
- [120] Ito H., Buck W.W., Gross F. Covariant quark model of the pion structure// Phys.Lett.B.-1990.-V.248.-P.28–33.
- [121] Schiavilla R., Riska D.O. Threshold electrodisintegration and electromagnetic form factors of the deuteron//Phys.Rev.C.-1991.-V.43.-P.437–451.
- [122] Arenhövel H., Ritz F., Wilbois T. Elastic electron–deuteron scattering with consistent meson exchange and relativistic contributions of leading order // Phys.Rev.C.-2000.-V.61.-034002.
- [123] Krutov A.F., Troitsky V.E. On a possible estimation of the constituent-quark parameters from Jefferson Lab experiments on the pion form factor// Eur.Phys.J.C.-2001.-V.20.-P.71-76.
- [124] Крутов А.Ф., Троицкий В.Е. Асимптотическая оценка зарядового формфактора пиона// ТМФ.-1998.-Т.116.-С.215-224.
- [125] Крутов А. Ф., Нефедов М. А., Троицкий В. Е. Аналитическое продолжение формфактора пиона из пространственноподобной во времениподобную область// ТМФ.-2013.-Т.174.-С.383-397.
- [126] Troitsky S.V., Troitsky V.E. Constraining scenarios of the soft/hard transition for the pion electromagnetic form factor with expected data of 12-GeV Jefferson Lab experiments and of the Electron-Ion Collider// Phys. Rev. D.-2015.-V.91.-P.033008; arXiv:1501.02712v[hep-ph].

- [127] Krutov A.F., Troitsky V.E. Deuteron tensor polarization component $T_{20}(Q^2)$ as a crucial test for deuteron wave functions//Phys.Rev.C.-2007.-V.75.-014001.
- [128] Krutov A.F., Troitsky V.E., Tsirova N.A. Asymptotics of the deuteron form factors in the nucleon model and JLab experiments// Phys.Rev.C.-2008.-V.78.- 044002.
- [129] Варшалович Д.А., Москаев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента//Л.: Наука.-1975.-440 С.
- [130] Крутов А. Ф., Троицкий В. Е. Построение формфакторов составных систем с помощью обобщенной теоремы Вигнера-Эккарта для группы Пуанкаре//ТМФ.-2005.-Т.143.-С.258-277.
- [131] Зар Э. Теория углового момента//М.: Мир.-1993.-351 С.
- [132] Wigner E.P. On unitary representation of inhomogeneous Lorentz group//Annals Math.-1939.-V.40.-P.149-204.
- [133] Широков Ю.М. Релятивистская теория спина//ЖЭТФ.-1951.-Т.21.-С.748-760.
- [134] Баландина Е.В., Юдин Н.П. О соотношении параметризации электромагнитных токов в квантовой теории//Вестник МГУ.-1995.-Т.36.-С.14-19.
- [135] Бюклинг Е., Каянти К. Кинематика элементарных частиц//М.: Мир.-1975.-343 С.
- [136] Эдмондс А.Д. Угловые моменты в квантовой механике. В сб. "Деформация атомных ядер": Пер. с англ.//М.: Изд-во иностр. лит.-1958.-С.305-351.
- [137] Jaus W. Relativistic constituent-quark model of electroweak properties of light mesons// Phys.Rev.D.-1991.-V.44.-P.2851-2859.
- [138] Троицкий В. Е., Широков Ю. М. О связи скачков на кинематическом и аномальном разрезах с S -матрицей на массовой оболочке// ТМФ.-1969.-Т.1.-С.213-221.

- [139] Anisovich V. V., Kobrinsky M. N., Melikhov D. I., Sarantsev A. V. Quark-hadron duality and meson-meson scattering amplitudes// Nucl. Phys.A.-1992.-V.544.-P.417-433.
- [140] Баландина Е. В., Крутов А. Ф., Троицкий В. Е. Релятивистская модель двухкварковых составных систем//ТМФ.-1995.-Т.103.-С.41-53.
- [141] Balandina E. V., Krutov A. F., Troitsky V. E. Elastic charge form factors of π and K mesons // J. Phys. G.: Nucl. Part. Phys.-1996.-V.22.-P.1585-1592.
- [142] Krutov A. F., Troitsky V. E. Relativistic properties of spin and pion electromagnetic structure//Journal of High Energy Physics.-1999.-028.
- [143] Gerasimov S.B. Magnetic moments of baryons and strange content of the nucleon//Phys.Lett.B.-1995.-V.357.-P.666-670.
- [144] Ho-Meoyng Choi, Chueng-Ryong Ji, Ziyue Li. Variational analysis of mass spectra and decay constants for ground state pseudoscalar and vector mesons in light-front quark model// arXiv:1502.03078v1[hep-ph].-2015.-P.1-9.
- [145] Coester F., Polyzou W.N. Charge form factors of quark-model pions// Phys.Rev.C.-2005.-V.71.-028202.
- [146] Gourdin M. Weak and electromagnetic form factors of hadrons Phys.Rep.-1974.-V.11.-P.29-98.
- [147] Eschrich I., et al. (SELEX Collaboration). Measurement of the Σ^- charge radius by Σ^- electron elastic scattering// Phys.Lett. B.-2001.-V.522.-P.233-239.; arXiv:0106053v2[hep-ex].
- [148] Antognini A., Nez F., Schuhmann K., Amaro F.D., Biraben F., et al. Proton structure from the measurement of 2S-2P transition frequencies of muonic hydrogen// Science.-2013.-V.339.-P.417-420.
- [149] Ho-Meoyng Choi, Chueng-Ryong Ji. Distribution amplitudes and decay constants for (π, K, ρ, K^*) -mesons in the light-front quark model// Phys.Rev.D.-2007.-V.75.-034019.

- [150] Bernard L., Bakker G., Ho-Meoyng Choi, Chueng-Ryong Ji. The vector meson form factor analysis in light-front dynamics// Phys.Rev.D.-2002.-V.65.-116001.
- [151] Mello C. S., da Silva A. N., de Melo J. P. B. C., Frederico T. Light-front spin-1 model: Parameters dependence//Few-Body Syst.-V.56.-2015.-P.509.
- [152] Bhagwat M. S., Maris P. Vector meson form factors and their quark-mass dependence// Phys.Rev.C.-2008.-V.77.-025203.
- [153] Roberts H. L. L., Bashir A., Gutierrez-Guerrero L. X., Roberts C. D., Wilson D. J. π and ρ mesons, and their diquark partners, from a contact interaction// Phys.Rev.C.-2011.-V.83.-065206.
- [154] Grigoryan H. R., Radyushkin A.V. Structure of vector mesons in a holographic model with linear confinement// Phys.Rev.D.-2007.-V.76.-095007.
- [155] Carrillo-Serrano M. E., Bentz W., Cloet I. C., Thomas A.W. Rho meson form factors in confining Nambu-Jona-Lasino model// Phys.Rev.C.-2015.-V.92.-015212.
- [156] Lombard R. J., Mares J. On the meson charge radii// Phys.Lett.B.-2000.-V.472.-P.150.
- [157] Ying Chen, Andrei Alexandru, Terrence Draper, Keh-Fei Liu, Zhaofeng Liu, Yi-Bo Yang. Leptonic decay constant of ρ at physical point//arXiv:1507.02541 [hep-ph].-2015.-P.1-5.
- [158] Owen B., Kamel W., Leinweber D., Menadue B., Mahbub S. Light meson form factors at near physical masses// Phys.Rev.D.-V.91.-2015.-074503.
- [159] Melikhov D., Simula S. Electromagnetic form factors in the light-front formalism and the Feynman triangle diagram: spin-0 and spin-1 two-fermion systems// Phys.Rev.D.- V.65.-2002.-094043.
- [160] Ho-Meoyng Choi, Chueng-Ryong Ji. Electromagnetic structure of the ρ -meson in the light-front quark model// Phys.Rev.D.-2004.-V.70.-053015.

- [161] de Melo J.P.B.C., Frederico T. Covariant and light-front approaches to the ρ -meson electromagnetic form factors//Phys.Rev.C.-1996.-V.55.-2043.
- [162] Bierrat E.P., Schweiger W. Electromagnetic ρ -meson form factors in point-form relativistic quantum mechanics// Phys.Rev.C.-2014.-V.89.-055205.
- [163] Mello C.S., da Silva A.N., de Melo J.P.B.C., Frederico T. Spin-1 particles with light-front approach// EPJ Web Conf.-2014.-V.73.- 03017.
- [164] de Melo J.P.B.C., Frederico T. Light-front projection of spin-1 electromagnetic current and zero-modes// Phys.Lett.B.-2012.-V.708.-P.87-92.
- [165] Frederico T., Pace E., Pisano S., Salme G. A covariant investigation of neutral vector mesons: dynamical properties and electromagnetic decay widths// Nucl. Phys. B.-2010.-V.199.-P.270.
- [166] Ho-Meoyng Choi J., Chueng-Ryong Ji. Self-consistent covariant description of vector meson decay constants and chirality-even quark-antiquark distribution amplitudes up to twist 3 in the light-front quark model// Phys.Rev.D.-2014.-V.89.-033011.
- [167] Yabusaki George H. S., Paracha M. Ali, de Melo J. P. B. C., El-Bennich Bruno. Pseudoscalar mesons with symmetric bound state vertex functions on the light front// Phys.Rev.D.-2015.-V.92.-034017.
- [168] Krutov A.F., Troitsky V.E. Comment on new results for the charged pion electromagnetic form factor//arXiv:0010076[nucl-th].-2000.-P.1-2.
- [169] Cardarelli F., Grach I.L., Narodetskii I.M., Salme G., Simula S. Radiative $\pi\rho$ and $\pi\omega$ transition form factor in a light-front constituent quark model//Phys.Lett. B.-1995.-V.359.-P.1-7.
- [170] Kossov M.V. Electroproduction of light quark meson//CEBAF-PROPOSAL.-1993.-V.93.-P.012.
- [171] Qian W., Bo-Qiang Ma. Tri-meson-mixing of $\pi - \eta - \eta'$ and $\rho - \omega - \varphi$ in the light-cone quark model//Eur.Phys.J.C.-2010.-V.65.-P.457-465.
- [172] Qiang Zhao., Al-Khalili J.S., Cole P.L. Vector meson photoproduction studied in its radiative decay channel//Phys.Rev.C.-2005.-V.71.-054004.

- [173] Flores-Baez F. V., Lopez Castro G., Toledo Sanchez G. The width difference of rho vector mesons//Phys.Rev.D.-2007.-V.76.-096010.
- [174] Bystriskiy Y.M., Kuraev E.A., Volkov M.K., Secansky M. Radiative decays of pseudoscalar P and vector V mesons and the process $e^+e^- \rightarrow \eta'\rho$ //Nucl.Phys.Proc.Suppl.-2008.-V.181.-P.210-214.
- [175] Beylin V., Kuksa V., Vereshkov G. Radiative decays of vector mesons in the gauge model of quark-meson interactions//arXiv:0803.0061 [hep-ph]-2009.-P.1-16.
- [176] Jianghao Y., Bo-Wen Xiao., Bo-Qiang Ma. Space-like and time-like pion-rho transition form factors in the light-cone formalism//J.Phys.G.-2007.-V.34.-P.1845-1860.
- [177] Terschlusen C., Leupold S. Radiative decays of vector and pseudoscalar nonets//EHJ Web of Conferences.-2012.-V.37.-05005.
- [178] Ivashyn S.A. Vector to pseudoscalar meson radiative transition in chiral theory with resonances//Nucl.Phys.Inv.-2012.-V.57.-P.179-182.
- [179] Maris P., Tandy P.C. Electromagnetic transition form factors of light mesons//Phys.Rev C.-2002.-V.65.-045211.
- [180] Anisovich A.V., Anisovich V.V., Dakhno L.G., Matveev M.A., Nikonov V.A., Sarantsev A.V. The $\rho \rightarrow \gamma\pi$ and $\omega \rightarrow \gamma\pi$ decays in the quark-model approach and estimation of coupling for pion emission by quark//Phys.Atom.Nucl.-2010.-V.73.-P.462-477.
- [181] Cheng Shan., Zhen-Jun Xiao. The perturbative QCD factorization of $\rho\gamma^* \rightarrow \pi$ //Phys.Rev.D.-2014.-V.90.-076001.
- [182] Desplanques B. RQM description of the charge form factor of the pion and its asymptotic behavior//Eur.Phys.J.A.-2009.-V.42.-P.219-236.
- [183] Desplanques B., Dong Y.B. Form factors in RQM approaches: constraints from space-time translations, extension to constituents with spin-1/2 and unequal masses//arXiv:0907.2835 [nucl-th].-2009.-P.1-30.
- [184] Ванько В.И. Вариационные принципы и задачи физики//М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана.- 2010.-191 С.

- [185] Isgur N., Godfrey S. Mesons in a relativized quark model with chromodynamics//Phys.Rev.D.-1985.-V.32.-P.189-231.
- [186] Tezuka H. Analytical solution of the Schrodinger equation with linear confinement potential//J.Phys.A:Math.Gen.-1991.-V.24.-P.5267-5272.
- [187] Amendolia S.R. Measurement of the space-like pion electromagnetic form factor//Nucl.Phys.B.-1986.-V.277.-P.168-216.

Приложение 1

Свободные двухчастичные формфакторы, полученные с использованием процедуры параметризации матричного элемента тока, недиагонального по полному угловому моменту :

$$\begin{aligned}
 G_{01}^{01}(s, Q^2, s') &= \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\pi} \Theta(s, Q^2, s')(s + s' + Q^2)}{2\sqrt{s - 4M^2}\sqrt{s' - 4M^2}\sqrt{4M^2 + Q^2}[\lambda(s, -Q^2, s')]^{1/2}} \cdot \\
 &\cdot \cos \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2} \left[M[\lambda(s, -Q^2, s')]^{1/2} (G_E^u(Q^2) + G_E^{\bar{d}}(Q^2)) \right] + \\
 &+ \sin \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2} \left[\frac{\xi(s, s', Q^2)\lambda(s, -Q^2, s')}{s'(s + s' + Q^2)} (G_M^u(Q^2) + G_M^{\bar{d}}(Q^2)) \right]. \quad (4.97)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_{01}^{121}(s, Q^2, s') &= \frac{\sqrt{2} \cdot \Theta(s, Q^2, s')(s + s' + Q^2)}{2\sqrt{s - 4M^2}\sqrt{s' - 4M^2}\sqrt{4M^2 + Q^2}[\lambda(s, -Q^2, s')]^{1/2}} \cdot \\
 &\cdot \sin \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2} \left[\frac{3\sqrt{-2s'(8M^2 - s + Q^2 + (s + Q^2)^2 + s'^2)}[\lambda(s, -Q^2, s')]^{1/2}}{8s'} \right] \\
 &\cdot (G_M^u(Q^2) + G_M^{\bar{d}}(Q^2)) + \\
 &+ \sin \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2} \left[M \frac{\xi(s, s', Q^2)}{s + s' + Q^2} (G_M^u(Q^2) + G_M^{\bar{d}}(Q^2)) \right] + \\
 &+ \cos \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2} \left[\frac{[(s + Q^2)^2 - s'^2](s + s' + Q^2) + [\lambda(s, -Q^2, s')]^{1/2}}{(s + s' + Q^2)} \right] \\
 &\cdot (G_M^u(Q^2) + G_M^{\bar{d}}(Q^2)) + \\
 &+ \cos \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2} \left[\frac{M[(s + Q^2)^2 - s'^2]}{\sqrt{s'}[\lambda(s, -Q^2, s')]^{1/2}} \cdot (G_E^u(Q^2) + G_E^{\bar{d}}(Q^2)) \right]. \quad (4.98)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{01}^{101}(s, Q^2, s') &= \frac{\Theta(s, Q^2, s')(s + s' + Q^2)}{2\sqrt{s - 4M^2}\sqrt{s' - 4M^2}\sqrt{4M^2 + Q^2}[\lambda(s, -Q^2, s')]^{1/2}} \cdot \\
&\cdot \sin \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2} \left[M \frac{\xi(s, s', Q^2)}{s + s' + Q^2} (G_E^u(Q^2) + G_E^{\bar{d}}(Q^2)) \right] - \\
&- \cos \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2} \left[\frac{[(s + Q^2)^2 - s'^2] \cdot (s + s' + Q^2) + [\lambda(s, -Q^2, s')]^{1/2}}{(s + s' + Q^2)} \right] \\
&\cdot (G_M^u(Q^2) + G_M^{\bar{d}}(Q^2)) - \\
&- \cos \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2} \left[\frac{M[(s + Q^2)^2 - s'^2]}{\sqrt{s'}[\lambda(s, -Q^2, s')]^{1/2}} \cdot (G_E^u(Q^2) + G_E^{\bar{d}}(Q^2)) \right], \quad (4.99)
\end{aligned}$$

$$\Theta(s, Q^2, s') = \vartheta(s' - s_1) - \vartheta(s' - s_2),$$

$$s_{1,2} = 2M^2 + \frac{1}{2M^2}(2M^2 + Q^2)(s - 2M^2) \mp \frac{1}{2M^2} \sqrt{Q^2(Q^2 + 4M^2)s(s - 4M^2)},$$

ϑ - ступенчатая функция:

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

$$\xi(s, s', Q^2) = \sqrt{ss'Q^2 - M^2\lambda(s, -Q^2, s')},$$

$$\lambda(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab + ac + bc),$$

$$\omega_1 = \arctan \frac{\xi(s, s', Q^2)}{M[(\sqrt{s} + \sqrt{s'})^2 + Q^2] + \sqrt{ss'}(\sqrt{s} + \sqrt{s'})},$$

$$\omega_2 = \arctan \frac{\xi(s, s', Q^2)(2M + \sqrt{s} + \sqrt{s'})}{M(s + s' + Q^2)(2M + \sqrt{s} + \sqrt{s'}) + \sqrt{ss'}(4M^2 + Q^2)},$$

$G_M^{u,\bar{d}}(Q^2)$ и $G_E^{u,\bar{d}}(Q^2)$ - саксовские магнитный и электрический формфакторы кварков.

Приложение 2

Свободные электромагнитные формфакторы двух свободных кварков с квантовыми числами ρ - мезона:

Зарядовый свободный двухчастичный формфактор:

$$g_{0C}(s, Q^2, s') = \frac{1}{3} R(s, Q^2, s') Q^2 \times \\ \times \left\{ (s + s' + Q^2)(G_E^u + G_E^{\bar{d}}) [2 \cos(\omega_1 - \omega_2) + \cos(\omega_1 + \omega_2)] - \right. \\ \left. - \frac{1}{M} \xi(s, Q^2, s')(G_M^u + G_M^{\bar{d}}) [2 \sin(\omega_1 - \omega_2) - \sin(\omega_1 + \omega_2)] \right\}. \quad (4.100)$$

Квадрупольный свободный двухчастичный формфактор:

$$g_{0Q}(s, Q^2, s') = \frac{1}{2} R(s, Q^2, s') Q^2 \times \\ \times \left\{ (s + s' + Q^2)(G_E^u + G_E^{\bar{d}}) [\cos(\omega_1 - \omega_2) - \cos(\omega_1 + \omega_2)] - \right. \\ \left. - \frac{1}{M} \xi(s, Q^2, s')(G_M^u + G_M^{\bar{d}}) [\sin(\omega_1 - \omega_2) + \sin(\omega_1 + \omega_2)] \right\}. \quad (4.101)$$

Магнитный свободный двухчастичный формфактор:

$$g_{0M}(s, Q^2, s') = -2 R(s, Q^2, s') \times \\ \times \left\{ \xi(s, Q^2, s')(G_E^u + G_E^{\bar{d}}) \sin(\omega_1 - \omega_2) + \right. \\ \left. + \frac{1}{4M} (G_M^u + G_M^{\bar{d}}) \left[(s + s' + Q^2) Q^2 \left(\frac{3}{2} \cos(\omega_1 - \omega_2) + \frac{1}{2} \cos(\omega_1 + \omega_2) \right) - \right. \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \xi(s, Q^2, s') [\beta(s, Q^2, s') + \beta(s', Q^2, s)] \times \right. \\ \left. \times [\sin(\omega_1 - \omega_2) - \sin(\omega_1 + \omega_2)] \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \xi^2(s, Q^2, s') \left[\frac{1}{\sqrt{s'}(\sqrt{s'} + 2M)} + \right. \right. \\ \left. \left. \right. \right\}$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s} + 2M)} \right] [\cos(\omega_1 - \omega_2) + \cos(\omega_1 + \omega_2)] \left. \right\} , \quad (4.102)$$

$$R(s, Q^2, s') = \frac{(s + s' + Q^2)}{2\sqrt{(s - 4M^2)(s' - 4M^2)}} \frac{\vartheta(s, Q^2, s')}{[\lambda(s, -Q^2, s')]^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2/4M^2}} ,$$

$$\xi(s, Q^2, s') = \sqrt{ss'Q^2 - M^2\lambda(s, -Q^2, s')} ,$$

$$\beta(s, Q^2, s') = \frac{(\sqrt{s'} + 2M)(s - s' + Q^2) + (s' - s + Q^2)\sqrt{s'}}{\sqrt{s'}(\sqrt{s'} + 2M)} .$$