Конференция по результатам 2024 года

К построению квантовой электродинамики в пространстве-времени Шварцшильда

И.П. Волобуев, <u>В.О. Егоров</u>, М.Н. Смоляков

24.02.2025

План

- Введение
- Спинорное поле
  - Спектр состояний
  - Каноническое квантование
- Электромагнитное поле
- Заключение

Введение

Квантование полей в присутствии черных дыр обсуждается уже давно, однако пробелы все еще остаются. Так, не все вопросы такого квантования рассмотрены с достаточной математической строгостью.

- Не проверено выполнение коммутационных соотношений, что является необходимым шагом при каноническом квантовании.
- Детально не обсуждаются наличие подходящей полной системы собственных функций, по которым будет раскладываться квантованное поле, и свойства этих функций.

- Является спектр состояний дискретным или непрерывным? Разные авторы противоречат друг другу даже в простейшем случае скалярного поля в пространстве-времени Шварцшильда в рамках релятивистской квантовой механики. См., например, работы
  - N. Deruelle, R. Ruffini, Phys. Lett. B **52** (1974) 437,
  - A. Zecca, Nuovo Cim. B **124** (2009) 1251.
- Наличие «белой дыры» в координатах Крускала-Секереша (максимальное аналитическое расширение координат Шварцшильда) приводит к проблемам с физической интерпретацией получающейся теории.

В недавней работе

- G. 't. Hooft, arXiv:2206.04608 [gr-qc]

была сделана попытка решить последнюю проблему путем «квантового клонирования» внешних областей черной и белой дыр. Внутренние области обеих дыр в этом подходе оказываются лишь математическими артефактами, которые не имеют прямой физической интерпретации и не играют никакой роли в эволюции системы.

Таким образом, актуальным остается вопрос, возможно ли построить последовательную квантовую теорию поля в пространстве-времени Шварцшильда только над горизонтом.

Спинорное поле

Действие спинорного поля $\psi(x)$ в произвольных криволинейных координатах:

$$S = \int \left[\frac{\mathrm{i}}{2} \left(\bar{\psi} \gamma^{(\nu)} e^{\mu}_{(\nu)} \nabla_{\mu} \psi - \nabla_{\mu} \bar{\psi}\, e^{\mu}_{(\nu)} \gamma^{(\nu)} \psi \right) - M \bar{\psi} \psi \right] \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4 x.$$

Ковариантная производная:

$$\nabla_{\mu}\psi = \partial_{\mu}\psi + \tfrac{1}{8} g_{\sigma\tau} e^{\tau}_{(\nu)} \left(\partial_{\mu} e^{\sigma}_{(\rho)} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda} e^{\lambda}_{(\rho)} \right) \left[\gamma^{(\nu)}, \gamma^{(\rho)} \right] \psi$$

Тетрада

Метрика Шварцшильда имеет вид

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - \frac{r_0}{r}} - r^2 \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\, \mathrm{d}\varphi^2 \right),$$

где $r_0 = 2GM_{\mathrm{BH}}$ — гравитационный радиус.

Важно: физические состояния квантовых систем всегда нормируемы. Для удаленного наблюдателя волновые функции таких состояний над горизонтом есть элементы гильбертова пространства функций с конечной нормой.

$$\int\limits_{r>r_0} \frac{r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-\frac{r_0}{r}}} \psi^\dagger(t,r,\theta,\varphi)\,\psi(t,r,\theta,\varphi) < \infty.$$

Получаем обобщенное уравнение Дирака:

$$\mathrm{i}\gamma^{(\nu)} e^{\mu}_{(\nu)} \nabla_\mu \psi - M\psi = 0.$$

В координатах Шварцшильда оно выглядит так:

$$\mathrm{i}\left(1-\frac{r_0}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \gamma^{(0)} \frac{\partial\psi}{\partial t} + \mathrm{i}\left(1-\frac{r_0}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \gamma^{(1)} \left[\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(1-\frac{3r_0}{4r}\right)\right]\psi +$$

$$+\frac{\mathrm{i}}{r}\gamma^{(2)}\left[\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{2}\right]\psi + \frac{\mathrm{i}}{r\sin\theta}\gamma^{(3)}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} - M\psi = 0.$$

Будем искать решение в виде:

$$\psi_{Ejlm}(t,r,\theta,\varphi)=\frac{1}{r}\left(1-\frac{r_0}{r}\right)^{-\frac{1}{4}}\cdot\begin{pmatrix} f_{jl}(E,r)\Omega_{jlm}(\theta,\varphi)\\ \mathrm{i}g_{jl'}(E,r)\Omega_{jl'm}(\theta,\varphi)\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}.$$

Радиальные функции (действительные)

$$\Omega_{jlm}(\theta,\varphi)=\begin{pmatrix} C^{jm}_{l,m-\frac12,\frac12,\frac12}Y_{l,m-\frac12}(\theta,\varphi)\\ C^{jm}_{l,m+\frac12,\frac12,-\frac12}Y_{l,m+\frac12}(\theta,\varphi)\end{pmatrix}$$

Шаровые спиноры. Образуют полную и ортогональную систему функций в пространстве комплексных спиноров на сфере S^2

Коэффициенты Клебша-Гордана

$l=j\pm\frac12,\quad l'=j\mp\frac12.$

Получим радиальное уравнение:

$$\sqrt{1-\frac{r_0}{r}}\left(-\mathrm{i}\sigma_2\sqrt{1-\frac{r_0}{r}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}+\sigma_1\frac{\kappa}{r}+\sigma_3 M\right)\begin{pmatrix} f_{jl}\\ g_{jl'}\end{pmatrix}=E\begin{pmatrix} f_{jl}\\ g_{jl'}\end{pmatrix},\quad \kappa=l(l+1)-j(j+1)-\frac14.$$

Его решения образуют полную ортогональную систему функций.

Перейдем к безразмерным переменным

$$\rho = r/r_0, \quad \varepsilon = Er_0, \quad \mu = Mr_0; \qquad z = \rho(z) + \ln(\rho(z) - 1).$$

Рассмотрим $\varepsilon > 0$. Произведя замену

$$f_{jl}(\varepsilon, z) = \sqrt{1 + \frac{\mu}{\varepsilon}\sqrt{1 - \frac{1}{\rho(z)}}}\; u_{jl}(\varepsilon, z),$$

можно получить уравнение на u_{jl} в виде одномерного уравнения Шредингера

$$-\frac{d^2 u_{jl}}{dz^2} + V_\kappa^{(u)}(\varepsilon, z) u_{jl} = \varepsilon^2 u_{jl}$$

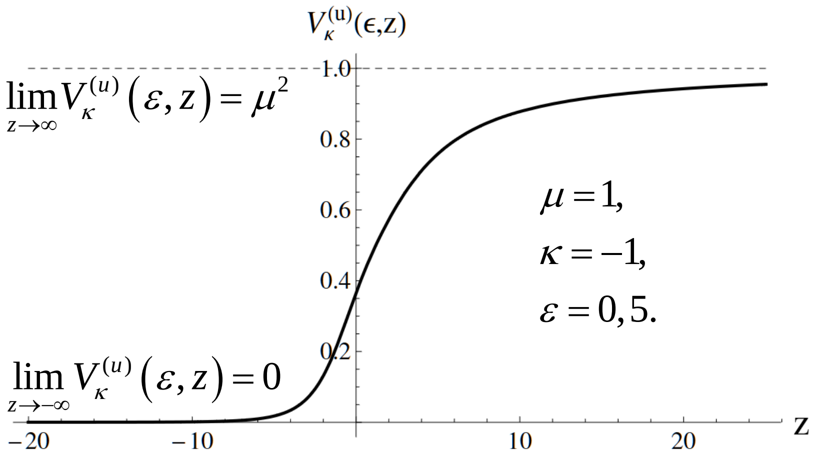
с квазипотенциалом

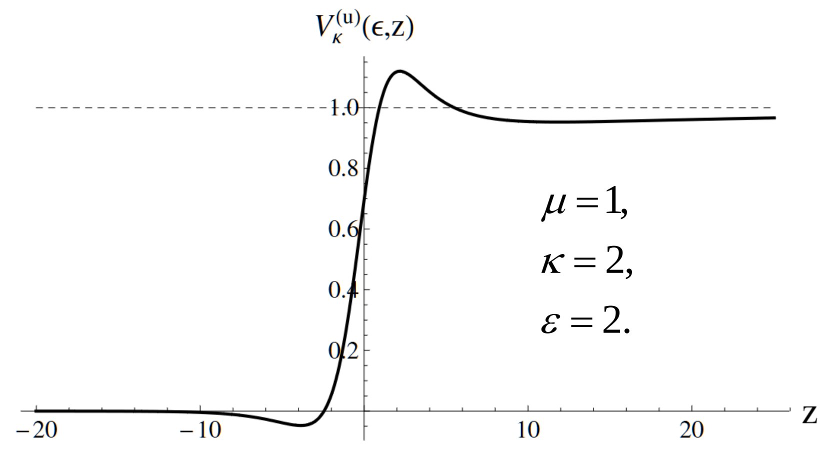
$$V_\kappa^{(u)}(\varepsilon, z) = \frac{\mu(\rho(z) - 1)^{\frac{3}{2}} - \kappa\varepsilon\rho(z)\sqrt{\rho(z) - 1}}{2\rho^{\frac{9}{2}}(z)\left(\varepsilon + \mu\sqrt{1 - \frac{1}{\rho(z)}}\right)} + \frac{\mu^2(\rho(z) - 1) - 2\mu\varepsilon\sqrt{(\rho(z) - 1)\rho(z)}}{16\rho^5(z)\left(\varepsilon + \mu\sqrt{1 - \frac{1}{\rho(z)}}\right)^2} +$$

$$+ \mu^2\frac{\rho(z) - 1}{\rho(z)} + \kappa\frac{(\rho(z) - 1)^{\frac{3}{2}}}{\rho^{\frac{7}{2}}(z)} + \kappa^2\frac{\rho(z) - 1}{\rho^3(z)}.$$

Аналогично для $\varepsilon < 0$ и функции g.

Примеры квазипотенциала:





Он представляет собой 1D потенциал типа «ступенька», как в нерелятивистской квантовой механике. Таким образом,

- спектр энергий спинорных состояний непрерывен во всем диапазоне $-\infty < E < \infty$,
- при $|E| > M$ имеется по два решения для данных j, l, m, а для $|E| < M$ только одно.

Решения ϕ с $E>0$ даются формулами

$$E<M: \quad \phi_{Ejlm}(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{r}\left(1-\frac{r_0}{r}\right)^{-\frac{1}{4}}\cdot\begin{pmatrix} f_{jl}(E,r)\Omega_{jlm}(\theta,\varphi) \\ \mathrm{i}g_{jl'}(E,r)\Omega_{jl'm}(\theta,\varphi)\end{pmatrix},$$

$$E>M: \quad \phi^{(p)}_{Ejlm}(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{r}\left(1-\frac{r_0}{r}\right)^{-\frac{1}{4}}\cdot\begin{pmatrix} f^{(p)}_{jl}(E,r)\Omega_{jlm}(\theta,\varphi) \\ \mathrm{i}g^{(p)}_{jl'}(E,r)\Omega_{jl'm}(\theta,\varphi)\end{pmatrix}, \quad p=1,2.$$

Решения χ с $E<0$ получаются заменой $f\leftrightarrow g$.

Разложение спинорного поля по полной системе стационарных состояний имеет вид

$$\psi(t,r,\theta,\varphi)=\sum_{j=\frac{1}{2}}^{\infty}\sum_{m=-j}^{j}\sum_{l=j\pm\frac{1}{2}}\left[\int_0^M \mathrm{d}E\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}\phi_{Ejlm}(\vec{r})a_{jlm}(E)+\mathrm{e}^{\mathrm{i}Et}\chi_{Ejlm}(\vec{r})b^{\dagger}_{jlm}(E)\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{p=1}^{2}\int_M^{\infty}\mathrm{d}E\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}\phi^{(p)}_{Ejlm}(\vec{r})a^{(p)}_{jlm}(E)+\mathrm{e}^{\mathrm{i}Et}\chi^{(p)}_{Ejlm}(\vec{r})b^{(p)\dagger}_{jlm}(E)\right)\right].$$

где $\left\{a^{(p)}_{jlm}(E),\, a^{(p')\dagger}_{j'l'm'}(E')\right\}=\left\{b^{(p)}_{jlm}(E),\, b^{(p')\dagger}_{j'l'm'}(E')\right\}=\delta_{pp'}\,\delta_{jj'}\,\delta_{ll'}\,\delta_{mm'}\,\delta(E-E'),\,\ldots$

Можно показать, что выполняются антикоммутационные соотношения

$$\left\{\psi_\alpha\left(t,r,\theta,\varphi\right),\psi_\beta^\dagger\left(t,r',\theta',\varphi'\right)\right\}=\delta_{\alpha\beta}\frac{\sqrt{1-\frac{r_0}{r}}}{r^2}\delta\left(r-r'\right)\delta\left(\cos\theta-\cos\theta'\right)\delta\left(\varphi-\varphi'\right),$$

$$\left\{\psi_\alpha\left(t,r,\theta,\varphi\right),\psi_\beta\left(t,r',\theta',\varphi'\right)\right\}=\left\{\psi_\alpha^\dagger\left(t,r,\theta,\varphi\right),\psi_\beta^\dagger\left(t,r',\theta',\varphi'\right)\right\}=0.$$

Гамильтониан системы имеет вид

$$H=\frac{\mathrm{i}}{2}\int\frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{1-\frac{r_0}{r}}}:\left(\psi^\dagger\dot{\psi}-\dot{\psi}^\dagger\psi\right):\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi=$$

$$=\sum_{j=\frac{1}{2}}^{\infty}\sum_{m=-j}^{j}\sum_{l=j\pm\frac{1}{2}}\left[\int_0^M E\left(a_{jlm}^\dagger\left(E\right)a_{jlm}\left(E\right)+b_{jlm}^\dagger\left(E\right)b_{jlm}\left(E\right)\right)\mathrm{d}E+\right.$$

$$\left.+\sum_{p=1}^{2}\int_M^\infty E\left(a_{jlm}^{(p)\dagger}\left(E\right)a_{jlm}^{(p)}\left(E\right)+b_{jlm}^{(p)\dagger}\left(E\right)b_{jlm}^{(p)}\left(E\right)\right)\mathrm{d}E\right].$$

Удвоение числа состояний при $E>M$

Электромагнитное поле

Действие в произвольных координатах:

$$S = -\frac{1}{4}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x,$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Можно наложить калибровочные условия (в координатах Шварцшильда)

$$A_t \equiv 0, \quad \nabla^\mu A_\mu + \frac{r_0}{r^2}A_r = 0,$$

где ковариантная производная $\nabla_\mu A_\nu = \partial_\mu A_\nu - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}A_\sigma$.
В изотропных координатах $t, \vec{R}$ второе из них

$$\operatorname{div}\vec{A} + \frac{r_0\left(\frac{r_0}{4R} - 2\right)}{2R^3\left(1 - \left(\frac{r_0}{4R}\right)^2\right)}(\vec{R}\vec{A}) = 0.$$

- При $R \to \infty$ имеем калибровку Кулона $\operatorname{div}\vec{A} = 0$.
- При $R \to r_0/4$ имеем калибровку Пуанкаре $(\vec{R}\vec{A}) = 0$.

В явном виде в координатах Шварцшильда это калибровочное условие имеет вид

$$\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2 A_r\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta A_\theta\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\varphi A_\phi=0.$$

Уравнения движения

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu}=\nabla^\mu\nabla_\mu A_\nu-\partial_\nu\nabla^\mu A_\mu=0$$

в координатах Шварцшильда записываются как

$$\frac{1}{1-\frac{r_0}{r}}\partial_t^2 A_r-\frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta\left[\sin\theta\left(\partial_\theta A_r-\partial_r A_\theta\right)\right]-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\partial_\varphi^2 A_r-\partial_r\partial_\varphi A_\varphi\right)=0,$$

$$\frac{1}{1-\frac{r_0}{r}}\partial_t^2 A_\theta-\partial_r\left[\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\left(\partial_r A_\theta-\partial_\theta A_r\right)\right]-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\partial_\varphi^2 A_\theta-\partial_\theta\partial_\varphi A_\varphi\right)=0,$$

$$\frac{1}{1-\frac{r_0}{r}}\partial_t^2 A_\varphi-\partial_r\left[\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\left(\partial_r A_\varphi-\partial_\varphi A_r\right)\right]-\frac{\sin\theta}{r^2}\partial_\theta\left[\frac{1}{\sin\theta}\left(\partial_\theta A_\varphi-\partial_\varphi A_\theta\right)\right]=0.$$

Будем искать решение в виде

$$\vec{A}_{Ejm}(t,r,\theta,\varphi)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}\sum_{\lambda=-1,0,1}F_j^{(\lambda)}(E,r)\vec{Y}_{jm}^{(\lambda)}(\theta,\varphi),$$

где $\vec{A}=(A_r,A_\theta,A_\varphi)$, а $\vec{Y}_{jm}^{(\lambda)}(\theta,\varphi)$ есть шаровые векторы

$$\vec{Y}_{jm}^{(-1)}(\theta,\varphi)=(1,0,0)\,Y_{jm}(\theta,\varphi),$$

$$\vec{Y}_{jm}^{(0)}(\theta,\varphi)=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{j(j+1)}}\left(0,\frac{1}{\sin\theta}\partial_\varphi,-\sin\theta\,\partial_\theta\right)Y_{jm}(\theta,\varphi),$$

$$\vec{Y}_{jm}^{(1)}(\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{j(j+1)}}\left(0,\partial_\theta,\partial_\varphi\right)Y_{jm}(\theta,\varphi).$$

Из калибровочного условия получим первое радиальное уравнение

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2F_j^{(-1)}\right)-\frac{\sqrt{j(j+1)}}{1-\frac{r_0}{r}}F_j^{(1)}=0.$$

Найдя $r^2F_j^{(-1)}\equiv G_j$, мы сразу сможем получить $F_j^{(1)}$.

Из остальных уравнений движения можно получить радиальные уравнения второго порядка на функции G_j и $F_j^{(0)}$, и эти уравнения имеют один и тот же вид

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}G_j\right]-\frac{j(j+1)}{r^2}G_j+\frac{E^2}{1-\frac{r_0}{r}}G_j=0.$$

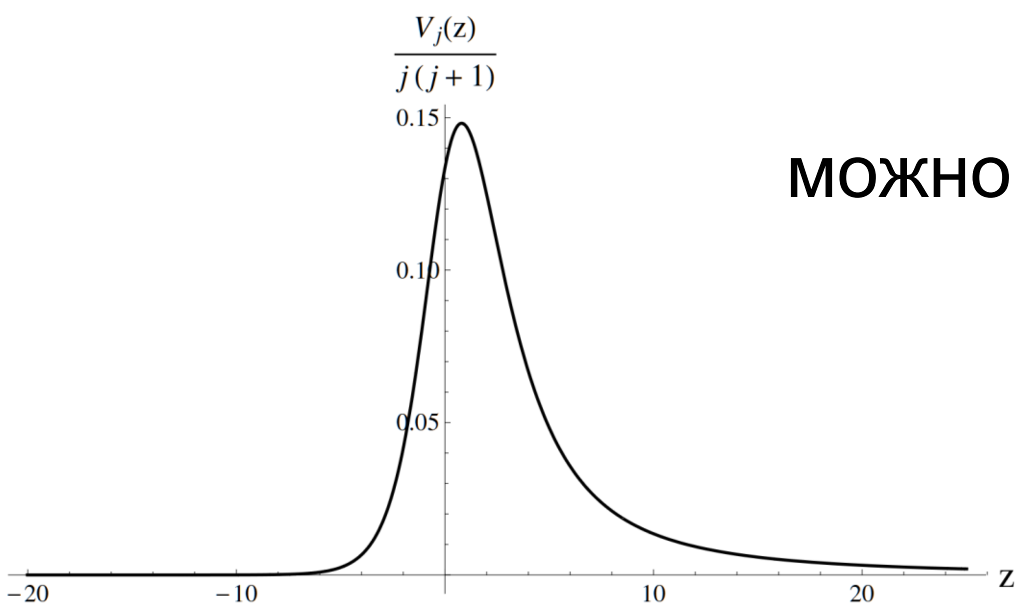
Переходя к «черепашьей» координате z,

$$z=\frac{r}{r_0}+\ln\left(\frac{r}{r_0}-1\right),$$

можно переписать его как

$$-\frac{\mathrm{d}^2G_j}{\mathrm{d}z^2}+V_j(z)G_j=r_0^2E^2G_j,$$

где $V_j(z)=j(j+1)\dfrac{\frac{r(z)}{r_0}-1}{\left(\frac{r(z)}{r_0}\right)^3}$.



При фиксированных E, j, m и p существует два независимых решения исходных уравнений движения $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}\vec{A}^{(a)}_{Ejmp}(\vec{r})$ и $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}\vec{A}^{(b)}_{Ejmp}(\vec{r})$, где

$$\vec{A}^{(a)}_{Ejmp}(\vec{r}) = \frac{\sqrt{j(j+1)}}{E}\begin{pmatrix} \frac{1}{r^2}F^{(0)}_{jp}(E,r)Y_{jm}(\theta,\varphi) \\ \frac{1}{j(j+1)}\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\partial_r F^{(0)}_{jp}(E,r)\partial_\theta Y_{jm}(\theta,\varphi) \\ \frac{1}{j(j+1)}\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\partial_r F^{(0)}_{jp}(E,r)\partial_\varphi Y_{jm}(\theta,\varphi) \end{pmatrix},$$

$$\vec{A}^{(b)}_{Ejmp}(\vec{r}) = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{j(j+1)}}F^{(0)}_{jp}(E,r)\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sin\theta}\partial_\varphi Y_{jm}(\theta,\varphi) \\ -\sin\theta\,\partial_\theta Y_{jm}(\theta,\varphi) \end{pmatrix}.$$

Разложение э/м поля по полной системе стационарных состояний имеет вид

$$\vec{A}(t,\vec{r}) = \sum_{p=1}^{2}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=-j}^{j}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}E}{\sqrt{2E}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}\vec{A}^{(a)}_{Ejmp}(\vec{r})a_{jmp}(E) + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}\vec{A}^{(b)}_{Ejmp}(\vec{r})b_{jmp}(E) + \mathrm{h.c.}\right),$$

где $\left[a_{jmp}(E),\, a^\dagger_{j'm'p'}(E')\right] = \left[b_{jmp}(E),\, b^\dagger_{j'm'p'}(E')\right] = \delta_{pp'}\,\delta_{jj'}\,\delta_{mm'}\,\delta(E-E'),\ \ldots$

Можно показать, что выполняются коммутационные соотношения

$$\left[A_k\left(t,\vec{r}\right),A_l\left(t,\vec{r}'\right)\right]=\left[\dot{A}_k\left(t,\vec{r}\right),\dot{A}_l\left(t,\vec{r}'\right)\right]=0.$$

Коммутаторы

$$\left[A_k\left(t,\vec{r}\right),\dot{A}_l\left(t,\vec{r}'\right)\right]\neq 0,$$

согласованные с калибровкой, слишком громоздки, чтобы приводить их здесь.

Гамильтониан системы имеет вид

$$H=\frac{1}{2}\int\sum_k:\left(A_k\partial_0^2A_k-\left(\partial_0A_k\right)^2\right):g^{kk}g^{00}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^3r=$$

$$=\sum_{p=1}^{2}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=-j}^{j}\int_0^{\infty}E\left(a^{\dagger}_{jmp}\left(E\right)a_{jmp}\left(E\right)+b^{\dagger}_{jmp}\left(E\right)b_{jmp}\left(E\right)\right)\mathrm{d}E.$$

Удвоение числа квантовых состояний

Заключение

- Показано, что согласованные квантовые теории спинорного и э/м полей на фоне ЧД Шварцшильда вне горизонта могут быть построены без учета внутренности ЧД.
- Спектр состояний имеет две ветви:
  - непрерывный при $E < M$, что соответствует частицам, запертым в окрестности горизонта (финитное движение);
  - непрерывный при $E > M$, что соответствует инфинитному движению частиц.
- Состояния в ветви $E > M$ дважды вырождены, чего нет в плоском пространстве-времени. Это топологический эффект.

- Фактически все готово для построения квантовой электродинамики в пространстве вне горизонта ЧД Шварцшильда.

Спасибо за внимание!

Доклад основан на результатах исследований в рамках научной программы Национального центра физики и математики, направление №5 «Физика частиц и космология».

Запасные слайды

Условия полноты для радиальных функций спинорного поля:

$$\int_0^M \mathrm{d}E\left(f_{jl}(E,r)f_{jl}(E,r')+g_{jl}(E,r)g_{jl}(E,r')\right)+$$
$$+\sum_{p=1}^{2}\int_M^\infty \mathrm{d}E\left(f_{jl}^{(p)}(E,r)f_{jl}^{(p)}(E,r')+g_{jl}^{(p)}(E,r)g_{jl}^{(p)}(E,r')\right)=\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\delta(r-r'),$$

$$\int_0^M \mathrm{d}E\left(f_{jl}(E,r)g_{jl'}(E,r')+g_{jl}(E,r)f_{jl'}(E,r')\right)+$$
$$+\sum_{p=1}^{2}\int_M^\infty \mathrm{d}E\left(f_{jl}^{(p)}(E,r)g_{jl'}^{(p)}(E,r')+g_{jl}^{(p)}(E,r)f_{jl'}^{(p)}(E,r')\right)=0.$$

Условие ортогональности:

$$\int_{r_0}^\infty \frac{\mathrm{d}r}{1-\frac{r_0}{r}}\left(f_{jl}(E,r)f_{jl}(E',r)+g_{jl'}(E,r)g_{jl'}(E',r)\right)=\delta(E-E').$$