Общеинститутский научный семинар.
Заседание, посвященное 100-летию
со дня рождения Ю.М.Широкова,
13.11.2025

Некоторые современные релятивистские модели составных систем и работы Ю.М. Широкова по группе Пуанкаре

А.Ф.Крутов, В.Е.Троицкий
Самарский государственный технический университет
Научно-исследовательский институт ядерной физики имени Д.В.Скобельцына
Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

Ю. М. Широков, “Теоретико-групповое рассмотрение основ релятивистской квантовой механики. I. Общие свойства неоднородной группы Лоренца”, ***ЖЭТФ*, 33:4 (1957), 861–872.**

Ю. М. Широков, “Теоретико-групповое рассмотрение основ релятивистской квантовой механики. II. Классификация неприводимых представлений неоднородной группы Лоренца”, ***ЖЭТФ*, 33:5 (1957), 1196–1207.**

Ю. М. Широков, “Теоретико-групповое рассмотрение основ релятивистской квантовой механики. III. Неприводимые представления классов P_0 и O_0, и неполностью приводимые представления неоднородной группы Лоренца”, ***ЖЭТФ*, 33:5 (1957), 1208–1214.**

Ю. М. Широков, “Теоретико-групповое рассмотрение основ релятивистской квантовой механики. IV. Пространственные отражения в квантовой теории”, ***ЖЭТФ*, 34:3 (1958), 717–724.**

Ю. М. Широков, “Теоретико-групповое рассмотрение основ релятивистской квантовой механики. V. Неприводимые представления неоднородной группы Лоренца, включая пространственную инверсию и обращение времени”, ***ЖЭТФ*, 36:3 (1959), 879–888.**

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

Ю. М. Широков, “Релятивистская теория спина”, ***ЖЭТФ*, 21 (1951), 748–760.**

Ю. М. Широков, “К вопросу о взаимодействии частиц нового типа спина 1/2 с внешним полем”, ***Докл. АН СССР*, 99 (1954), 737–740.**

Ю. М. Широков, “Релятивистская теория поляризационных эффектов”, ***ЖЭТФ*, 35:8 (1958), 1005–1012.**

Ю. М. Широков, “Релятивистские поправки к феноменологическим потенциалам”, ***ЖЭТФ*, 36:2 (1959), 474–477.**

Ю. М. Широков, “Микроковариантность и микропричинность в квантовой теории”, ***ЖЭТФ*, 44:1 (1962), 203–224.**

Ю. М. Широков, “Релятивистская инвариантность в квантовой теории”, ***ЭЧАЯ*, 3 (1972), 606–649.**

А. А. Чешков, Ю. М. Широков, “Инвариантная параметризация локальных операторов”, ***ЖЭТФ*, 44:6 (1963), 1982–1992.**

Инвариантная параметризация локальных операторов

А. А. Чешков, Ю. М. Широков, “Инвариантная параметризация локальных операторов”, ***ЖЭТФ*, 44:6 (1963), 1982–1992.**

$$\langle \vec{p}, j, m | j_\mu(0) | \vec{p}', j, m' \rangle = \sum_{m''} \langle m | D^j_w(p, p') | m'' \rangle \times$$

$$\times \left\langle m'' \middle| F_1 K'_\mu + F_2 \left[\Gamma_\mu(p') - (p_\mu \Gamma^\mu(p')) \left(\frac{K_\mu}{K^2} + \frac{K'_\mu}{K'^2} \right) \right] + i F_3 R_\mu \middle| m' \right\rangle.$$

$$K_\mu = (p - p')_\mu, \qquad K'_\mu = (p + p')_\mu, \qquad R_\mu = \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} p^\nu p'^{\,\lambda} \Gamma^\rho(p'),$$

$$\Gamma_0(p) = (\vec{p}\vec{j}\,), \quad \vec{\Gamma}(p) = M\vec{j} + \frac{\vec{p}(\vec{p}\vec{j}\,)}{p_0 + M}, \quad [j_i, j_k] = i\epsilon_{ikl} j_l, \quad \Gamma^2 = -M^2 j(j+1),$$

$$F_i = \sum_{n=0}^{2j} f_{in}(Q^2)(i p_\mu \Gamma^\mu(p'))^n, \qquad (12)$$

где $t = K^2 = -Q^2$, t – квадрат переданного импульса, $f_{in}(Q^2)$ – набор электромагнитных формфакторов частицы.

Инвариантная параметризация локальных операторов

Электромагнитный ток частицы со спином 1/2:

$$\langle \vec{p}, 1/2, m | j_\mu(0) | \vec{p}\,', 1/2, m' \rangle = \sum_{m''} \langle m | D_w^{1/2}(p, p') | m'' \rangle \times$$
$$\times \langle m'' | f_{10}(Q^2) K'_\mu + i f_{30}(Q^2) R_\mu | m' \rangle .$$

$$f_{10}(Q^2) = \frac{2M}{\sqrt{4M^2 + Q^2}} G_E(Q^2), \qquad f_{30}(Q^2) = -\frac{4}{M\sqrt{4M^2 + Q^2}} G_M(Q^2).$$

Тензор энергии-импульса частицы со спином 1/2:

$$\langle p, 1/2, m | T_{\mu\nu}(0) | p', 1/2, m' \rangle = \sum_{m''} \langle m | D_w^{1/2}(p, p') | m'' \rangle \left\langle m'' \left| \frac{1}{2} g_{10}(Q^2) K'_\mu K'_\nu + \right.\right.$$
$$\left.\left. + i g_{40}(Q^2)(K'_\mu R_\nu + R_\mu K'_\nu) - g_{60}(Q^2)(Q^2 g_{\mu\nu} + K_\mu K_\nu) \right| m' \right\rangle .$$

$$g_{10}(Q^2) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2/4M^2}} \left[\left(1 + \frac{Q^2}{4M^2} \right) A(Q^2) - 2 \frac{Q^2}{4M^2} J(Q^2) \right],$$

$$g_{40}(Q^2) = -\frac{1}{M^2} \frac{J(Q^2)}{\sqrt{1 + Q^2/4M^2}},$$

$$g_{60}(Q^2) = -\frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{Q^2}{4M^2}} D(Q^2),$$

Инвариантная параметризация локальных операторов

Электромагнитный ток двух свободных частиц спина ½ в S-состоянии относительного движения при *S*=0:

$$j_\mu^{(0)}(0) = j_\mu^{(1)} \otimes I^{(2)} \oplus j_\mu^{(2)} \otimes I^{(1)};$$

В базисе $|\vec{p}_1, m_1; \vec{p}_2, m_2\rangle = |\vec{p}_1, m_1\rangle \otimes |\vec{p}_2, m_2\rangle$

$$\langle \vec{p}_1, m_1; \vec{p}_2, m_2 | j_\mu^{(0)}(0) | \vec{p}\,'_1, m'_1; \vec{p}\,'_2, m'_2\rangle =$$
$$= \langle \vec{p}_1, m_1 | \vec{p}\,'_1, m'_1\rangle \langle \vec{p}_2, m_2 | j_{2\,\mu}(0) | \vec{p}\,'_2, m'_2\rangle + (1 \leftrightarrow 2).$$

В базисе $|\mathbf{P},\ \sqrt{s},\ J,\ l,\ S,\ m_J\rangle$

$$\langle \vec{P}, \sqrt{s}, | j_\mu^{(0)}(0) \mid \vec{P}', \sqrt{s'}\,\rangle = A'_\mu g_0(s, Q^2, s')$$

$$A'_\mu = \frac{1}{Q^2}[(s - s' + Q^2)P_\mu + (s' - s + Q^2)P'_\mu].$$

Инвариантная параметризация локальных операторов

Разложение Клебша-Гордана прямого произведения двух неприводимых представлений группы Пуанкаре на неприводимые $|\mathbf{P},\ \sqrt{s},\ J,\ l,\ S,\ m_J\rangle$

$$|\mathbf{p}_1, m_1;\, \mathbf{p}_2, m_2\rangle = \sum |\mathbf{P},\ \sqrt{s},\ J,\ l,\ S,\ m_J\rangle \times$$
$$\times \langle J m_J | S\, l\, m_S\, m_l\rangle Y^*_{l m_l}(\vartheta\,,\varphi)\left\langle S\, m_S \left|\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\tilde m_1\,\tilde m_2\right.\right\rangle \times$$
$$\times \langle \tilde m_1 |\, D^{1/2}(P,p_1)\,| m_1\rangle\langle \tilde m_2\,|\, D^{1/2}(P,p_2)\,| m_2\rangle;$$

здесь $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)/2$, $p = |\mathbf{p}|$; ϑ, φ — сферические углы вектора $\mathbf{p}$ в с. ц. и.;

Суммирование по $\tilde m_1,\ \tilde m_2,\ m_l,\ m_S,\ l,\ S,\ J,\ m_J.$

$$g_0(s,Q^2,s') = \frac{(s+s'+Q^2)Q^2}{2\sqrt{(s-4M^2)(s'-4M^2)}}\,\frac{\vartheta(s,Q^2,s')}{[\lambda(s,-Q^2,s')]^{3/2}}\,\frac{1}{\sqrt{1+Q^2/4M^2}}\times$$
$$\times\left\{(s+s'+Q^2)(G^u_E(Q^2)+G^{\bar d}_E(Q^2))\cos(\omega_1+\omega_2)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{M}\xi(s,Q^2,s')(G^u_M(Q^2)+G^{\bar d}_M(Q^2))\sin(\omega_1+\omega_2)\right\}.$$

Представление фазовых сдвигов

В. Е. Троицкий, Ю. М. Широков, “О связи скачков на кинематическом и аномальном разрезах с S-матрицей на массовой оболочке”, ***ТМФ*****, 1:2 (1969), 213–221.**

Электромагнитный ток системы двух бесспиновых частиц в S-состоянии относительного движения:

$$j_\mu = j_\mu^{(0)} + j_\mu^{(\mathrm{int})}.$$

Электромагнитный формфактор:

$$G = g_0(s, Q^2, s') + G_i(s, Q^2, s')$$

Обкладки из *in*- и *out*-состояний:

$$\langle \mathbf{P}(\pm)\,|\,j_\mu^{(\mathrm{int})}\,|\,\mathbf{P}'(\pm)\rangle \qquad G_i(s \mp i\varepsilon, Q^2, s' \pm i\varepsilon)$$

Переменная s фиксирована, по переменной s’ матричные элементы связаны S-матрицей:

$$\langle \mathbf{P}\,|\,j_\mu\,|\,\mathbf{P}'(+)\rangle = \langle \mathbf{P}\,|\,j_\mu\,|\,\mathbf{P}'(-)\rangle\, S(s'); \qquad S(s) = \frac{B(s - i\varepsilon)}{B(s + i\varepsilon)}.$$

Представление фазовых сдвигов

Задача Римана для формфактора:

$$G_i(s,Q^2,s'-i\varepsilon)\,B(s'-i\varepsilon)-G_i(s,Q^2,s'+i\varepsilon)\,B(s'+i\varepsilon)=$$
$$=-g_0(s,Q^2,s')\,(B(s'-i\varepsilon)-B(s'+i\varepsilon)).$$

Решение:

$$G_i(s,Q^2,s')\,B(s')=\tilde{G}(s,Q^2,s')+C_1(s,Q^2,s'),$$

$$\tilde{G}(s,Q^2,s')=-\frac{1}{2\,\pi\,i}\int\limits_{4\,M^2}^{\infty}\frac{ds''\,g_0(s,Q^2,s'')\,\Delta(s'')}{s'-s''},$$

$$\Delta(s)=(B(s+i\varepsilon)-B(s-i\varepsilon)),$$

$C_1(s,Q^2,s')$ - регулярная функция в окрестности действительной оси *s'*

$$4M^2\leqslant s'<\infty.$$

$C_1(s,Q^2,s')$ вычисляется из решения задачи Римана по переменной *s*

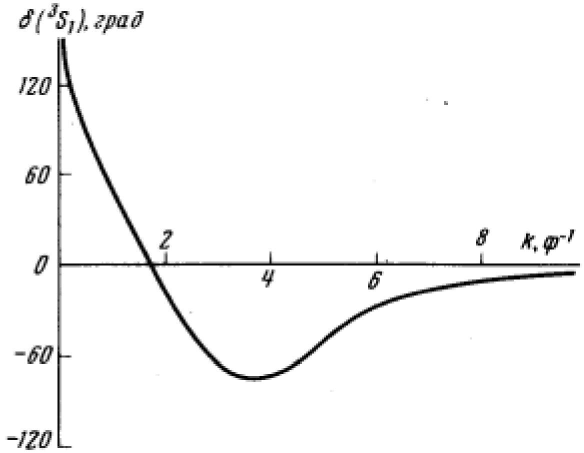
Представление фазовых сдвигов

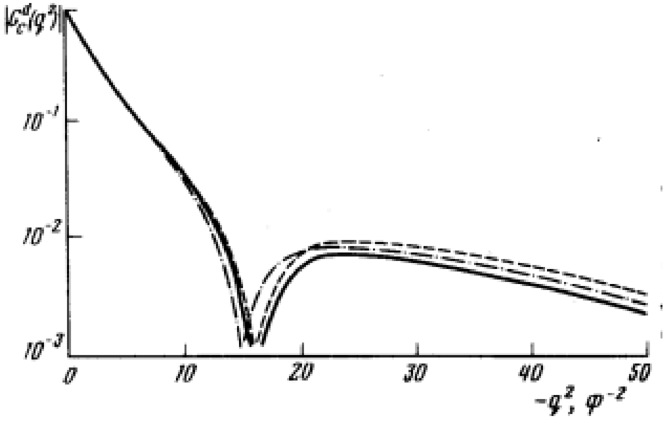
После продолжения в точку связанного состояния получаем электромагнитный формфактор системы связанных частиц:

$$F_c(Q^2) = \Gamma^2 \int\limits_{4\,M^2}^{\infty} ds\, ds' \frac{g_0(s, Q^2, s')\, \Delta(s)\, \Delta(s')}{(s - M_c^2)(s' - M_c^2)}.$$

Применение к релятивистскому описанию дейтрона:

В. М. Музафаров, В. Е. Троицкий, Ю. М. Широков, “Релятивистские поправки к зарядовому формфактору дейтона при больших переданных импульсах”, ***Письма в ЖЭТФ*, 27:9 (1978), 538–542.**





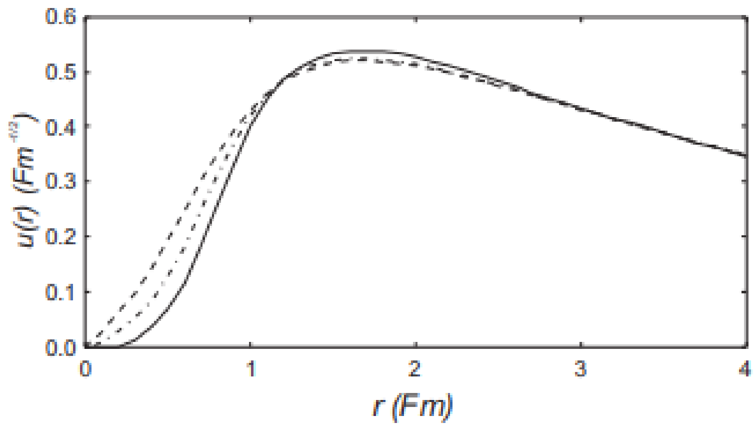
Дейтронные волновые функции Музафарова-Троицкого

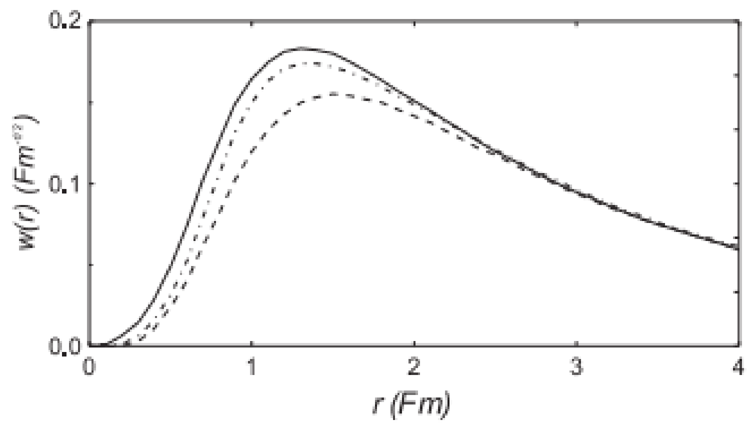
V. M. Muzafarov and V. E. Troitsky, ***Yad. Fiz.*** **33, 1461 (1981)**
[***Sov. J. Nucl. Phys.*** **33, 783 (1981)**].

Анализ аналитических свойств амплитуды электрорасщепления дейтрона:

$$u(r) = \tilde{\Gamma} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\Delta(x)}{x - \kappa} \sin(xr),$$

здесь κ^2 — энергия связи дейтрона; $\tilde{\Gamma}$ — нормировочная константа, включающая вклады так называемых нефизических разрезов.

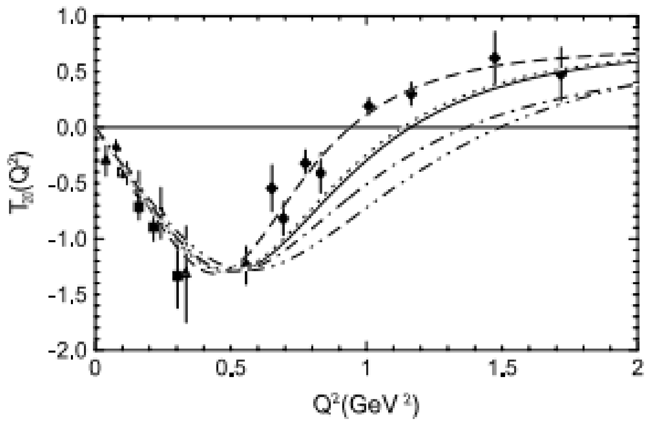


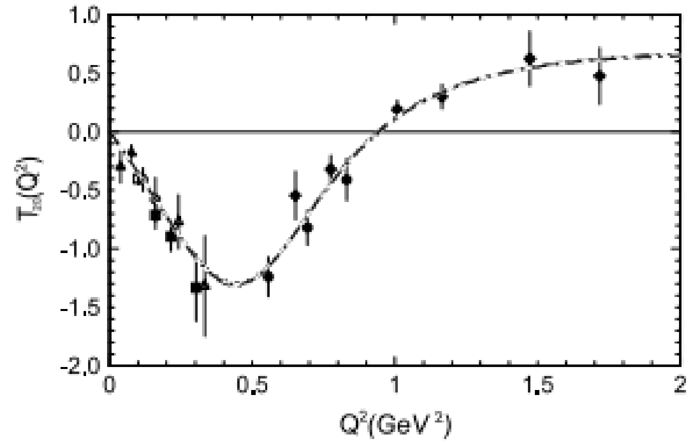


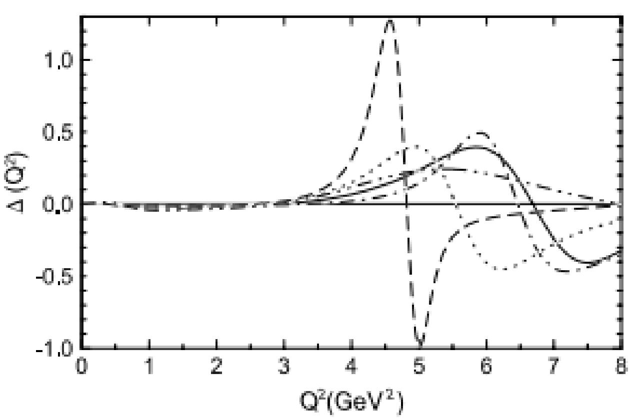
Дейтронные волновые функции Музафарова-Троицкого

Описание дейтрона:

A.F.Krutov, V.E.Troitsky, Deuteron tensor polarization component *$T_{20}(Q2)$* as a crucial test for deuteron wave functions, ***Phys.Rev.C*, 75, 014001 (2007)**







Релятивистские дираковские динамики

P. A. M. Dirac, “Forms of relativistic dynamics”, ***Rev. Mod. Phys.,* 21:3 (1949), 392–399.**

H. Leutwyler, J. Stern, “Relativistic dynamics on null plane”, ***Ann. Phys. (N. Y.),* 112:1 (1978), 94-164.**

B. D. Keister, W. N. Polyzou, “Relativistic Hamiltonian dynamics in nuclear and particle physics”, ***Advances in Nuclear Physics*, 20**, eds. J.W. Negele, E.W. Vogt, Plenum Press, New York, **1991, 225–479.**

F. Coester, “Null-plane dynamics of particles and fields”, ***Prog. Part. Nucl. Phys.***, **29 (1992), 1–32.**

Е. В. Баландина, А. Ф. Крутов, В. Е. Троицкий, “Релятивистская модель двухкварковых составных систем”, ***ТМФ*, 103:1 (1995), 41–53.**

А. Ф. Крутов, В. Е. Троицкий, “Мгновенная форма Пуанкаре-инвариантной квантовой механики и описание структуры составных систем”, ***ЭЧАЯ*, 40 (2009), 269–319.**

Релятивистские дираковские динамики

Алгебра группы Пуанкаре (неоднородная группа *SL(2,C)*)

$$[\hat{M}^{\mu\nu}, \hat{P}^{\sigma}] = -i(g^{\mu\sigma}\hat{P}^{\nu} - g^{\nu\sigma}\hat{P}^{\mu}),$$

$$[\hat{M}^{\mu\nu}, \hat{M}^{\sigma\rho}] = -i(g^{\mu\sigma}\hat{M}^{\nu\rho} - g^{\nu\sigma}\hat{M}^{\mu\rho}) - (\sigma \leftrightarrow \rho),$$

$$[\hat{P}^{\mu}, \hat{P}^{\nu}] = 0.$$

Алгебра центрального расширения группы Галилея (накрывающая SU(2))

$$\hat{H},\ \hat{\mathbf{P}},\ \hat{\mathbf{J}},\ \hat{\mathbf{K}},\ \hat{M},$$

Ненулевые коммутационные соотношения

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{J}_k, \quad [\hat{J}_i, \hat{K}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{K}_k, \quad [\hat{J}_i, \hat{P}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{P}_k,$$

$$[\hat{K}_i, \hat{H}] = -i\hat{P}_i, \quad [\hat{K}_i, \hat{P}_k] = -i\delta_{ik}\hat{M}.$$

Включение взаимодействия в алгебру группы Галилея: $\hat{H} \to \hat{H} + \hat{V}.$

$$[\hat{\mathbf{P}}, \hat{V}] = [\hat{\mathbf{J}}, \hat{V}] = [\nabla_P, \hat{V}] = [\hat{M}, \hat{V}] = 0.$$

Релятивистские дираковские динамики

Включение взаимодействия в алгебру группы Пуанкаре: $\hat{H} \to \hat{H} + \hat{V}.$

$$[\hat{P}^j \hat{N}^k] = i\delta^{jk}\,\hat{H}.$$

Три основные формы динамики: мгновенная форма, точечная форма, динамика на световом фронте.

Эквивалентность: С. Н. Соколов, А. Н. Шатний, “Физическая эквивалентность трех форм релятивистской динамики и сложение взаимодействия во фронтовой и мгновенной формах”, ***ТМФ*, 37:3 (1978), 291–304.**

Кинематическая подгруппа мгновенной формы динамики – группа движений евклидова пространства: $\hat{\mathbf{J}}, \hat{\mathbf{P}},$

Процедура Бакамджана-Томаса.

Bakamjian B., Thomas L. H. ***Phys. Rev.* 1953. V. 92. P. 1300-1310.**

$$\hat{M}_0 \to \hat{M}_I = \hat{M}_0 + \hat{V}.$$

$$\hat{M}_I = \hat{M}_I^+, \quad \hat{M}_I > 0,$$

$$\left[\hat{\mathbf{P}}, \hat{V}\right] = \left[\hat{\mathbf{J}}, \hat{V}\right] = \left[\nabla_P, \hat{V}\right] = 0.$$

Релятивистские дираковские динамики

Полный коммутирующий набор в мгновенной форме динамики:

$$\hat{M}_I^2 \ (\text{или } \hat{M}_I), \ \hat{J}^2, \ \hat{J}_3, \ \hat{\mathbf{P}}.$$

$\hat{J}^2$ — оператор квадрата полного момента количества движения. В мгновенной форме динамики операторы $\hat{J}^2$, $\hat{J}_3$, $\hat{\mathbf{P}}$ совпадают с соответствующими операторами системы без взаимодействия. Таким образом, от взаимодействия в (11) зависит только оператор $\hat{M}_I^2$ $(\hat{M}_I)$.

Три из четырех операторов полного набора диагональны в базисе:

$$|\mathbf{P}, \sqrt{s}, J, l, S, m_J\rangle$$

Задача на собственные функции и собственные значения оператора $\hat{M}_I^2$

$$\hat{U} = \frac{1}{4}(\hat{M}_I^2 - \hat{M}_0^2) = \frac{1}{4}(\hat{V}^2 + [\hat{M}_0, \hat{V}]_+).$$

$$(k^2 + \hat{U})|p_c\rangle = \eta|p_c\rangle,$$

$$\left(\sqrt{k^2 + M_1^2} + \sqrt{k^2 + M_2^2} + \hat{V}\right)|p_c\rangle = \lambda|p_c\rangle.$$

Релятивистские дираковские динамики

Проблема построения сохраняющегося лоренц-ковариантного тока.

$$j = \sum_k j^{(k)} + \sum_{k<m} j^{(km)}.$$

Импульсное приближение:

$$j \approx \sum_k j^{(k)}$$

Модифицированное импульсное приближение

Е. В. Баландина, А. Ф. Крутов, В. Е. Троицкий, “Релятивистская модель двухкварковых составных систем”, ***ТМФ*, 103:1 (1995), 41–53.**

А. Ф. Крутов, В. Е. Троицкий, “Построение формфакторов составных систем с помощью обобщенной теоремы Вигнера–Эккарта для группы Пуанкаре”, ***ТМФ*, 143:2 (2005), 258–277.**

$$\langle p_c\,|j_\mu(0)|p_c'\rangle = (p_c + p_c')_\mu\, F_c(Q^2),$$

$$|\mathbf{P},\ \sqrt{s},\ J,\ l,\ S,\ m_J\rangle \Longrightarrow \int d\sqrt{s}\, d\sqrt{s'}\, \varphi(s)\, G(s, Q^2, s')\, \varphi(s') = F_c(Q^2).$$

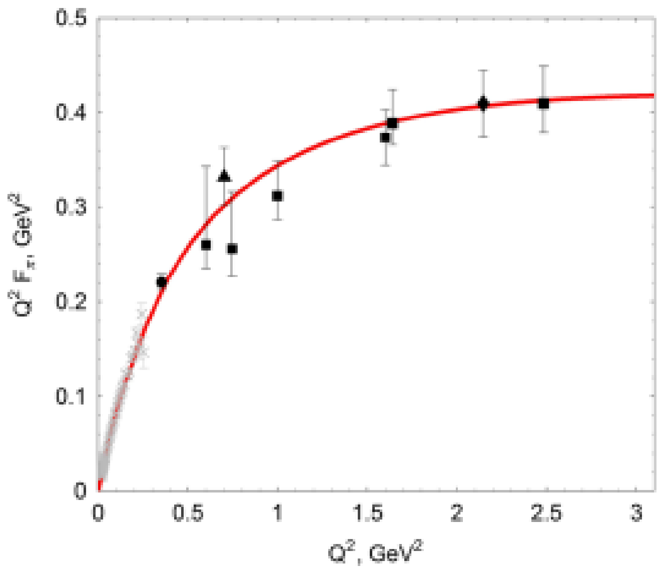
$$G(s, Q^2, s') \Longrightarrow g_0(s, Q^2, s') \quad F_c(Q^2) = \int d\sqrt{s}\, d\sqrt{s'}\, \varphi(s)\, g_0(s, Q^2, s')\, \varphi(s').$$

Мгновенная форма релятивистской дираковской динамики

Описание электромагнитной структуры пиона

A. F. Krutov, V. E. Troitsky, “On a possible estimation of the constituent-quark parameters from Jefferson Lab experiments on pion form factor” ***Eur. Phys. J. C*, 20 (2001), 71–76.**

A. F. Krutov, V. E. Troitsky, “Relativistic instant-form approach to the structure of two body composite systems”, ***Phys. Rev. C*, 65:4 (2002), 045501**.



Мгновенная форма релятивистской дираковской динамики

Асимптотика зарядового формфактора пиона при больших переданных импульсах.

КХД

G.R. Farrar and D. R. Jackson, ***Phys.Rev. Lett.* 43, 246 (1979).**
V. Efremov and A. V. Radyushkin, ***Phys. Lett.* 94B, 245 (1980).**
G. P. Lepage and S. J. Brodsky, ***Phys. Lett.* 87B, 359 (1979)**

$$Q^2 \to \infty. \quad Q^2 F_\pi(Q^2) \to 8\pi\alpha_s^{1\text{-loop}}(Q^2) f_\pi^2, \quad \alpha_s^{1\text{-loop}}(Q^2) = 4\pi/(\beta_0 \log(Q^2/\Lambda^2_{QCD}))$$

Мгновенная форма РДД

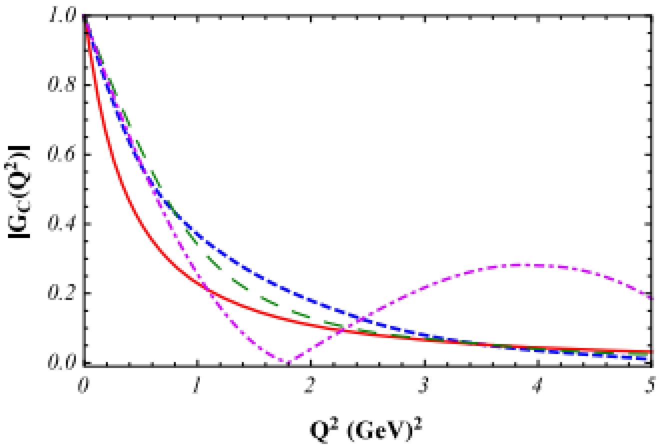
F. Krutov, V. E. Troitsky, N. A. Tsirova, “Nonperturbative relativistic approach to pion form factor: Predictions for future JLab experiments”, ***Phys. Rev. C*, 80:5 (2009), 055210**
S. V. Troitsky, V. E. Troitsky, “Transition from a relativistic constituent-quark model to the quantum-chromodynamical asymptotics: A quantitative description of the pion electromagnetic form factor at intermediate values of the momentum transfer”, ***Phys. Rev. D*, 88:9 (2013), 093005**.

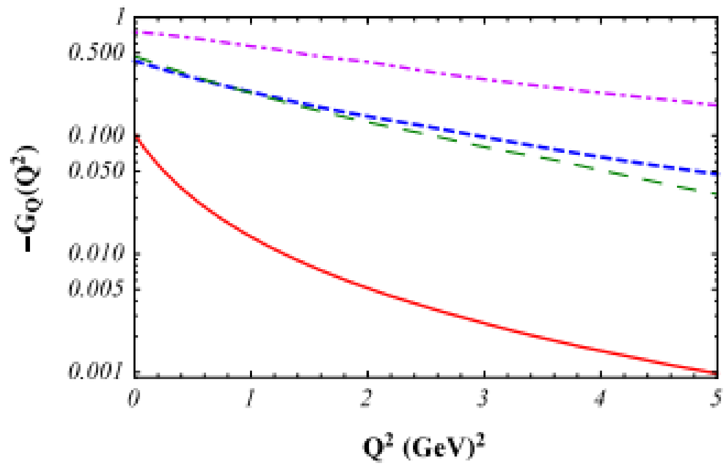
$$M \to 0, \qquad Q^2 \to \infty.$$

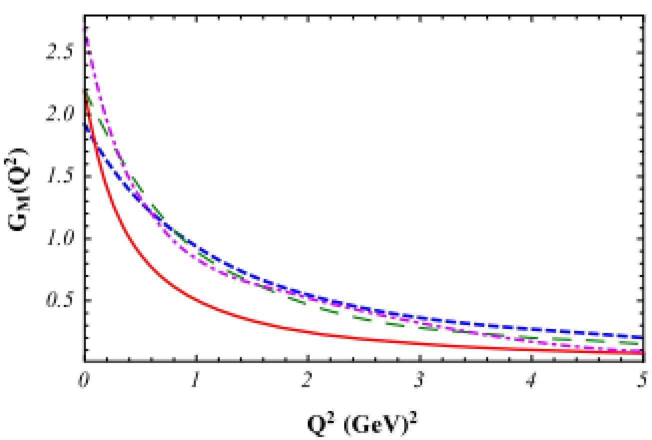
Мгновенная форма релятивистской дираковской динамики

Электромагнитная структура ρ -мезона

A.F. Krutov, R.G. Polezhaev, V.E. Troitsky, “Radius of the ρ meson determined from its decay constant”, ***Phys. Rev. D*, 93:3 (2016), 036007.**







$$\mu_\rho = 2.16 \pm 0.03 \; [e/2M_\rho] \qquad \langle r_\rho^2 \rangle = (0.56 \pm 0.04)\ \mathrm{fm}^2.$$

Djukanovic, effective field theory [22]	2.24
Andersen, lattice [23]	2.25 ± 0.34
Hedditch, lattice [24]	2.02
Lee, lattice [25]	2.39 ± 0.01
Owen, lattice [26]	2.21 ± 0.08
Lushevskaya, lattice [27]	2.11 ± 0.10
Gudinõ, experiment [28]	2.1 ± 0.5

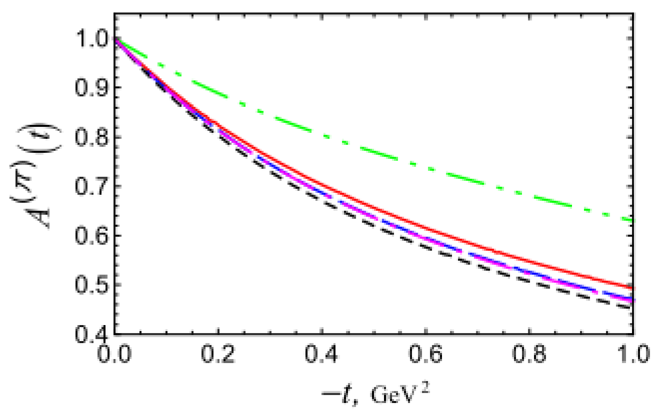
Мгновенная форма релятивистской дираковской динамики

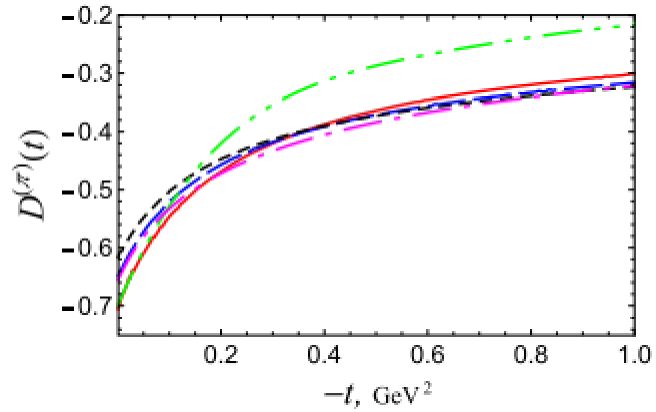
Гравитационная структура пиона

A.F. Krutov, V. E. Troitsky, “Pion gravitational form factors in a relativistic theory of composite particles”, ***Phys. Rev. D*, 103:1 (2021), 014029.**

A.F. Krutov, V. E. Troitsky, “Relativistic composite-particle theory of the gravitational form factors of pion: Quantitative results”, ***Phys. Rev. D*, 106:5 (2022), 054013.**

F. Krutov, V. E. Troitsky, “Pion gravitational form factors at large momentum transfer in the instant-form relativistic impulse approximation approach”, ***Phys. Rev. D*, 108:9 (2023), 094043.**





S. Kumano, Q. T. Song, and O. V. Teryaev, Hadron tomography by generalized distribution amplitudes in pion-pair production process γγ → π0π0 and gravitational form factors for pion, ***Phys. Rev. D* 97, 014020 (2018).**

Мгновенная форма релятивистской дираковской динамики

Гравитационные размеры нейтрального пиона

A. F. Krutov, V. E. Troitsky, “Step toward estimation of the neutral-hadron size: The gravitational mass radius of π 0 meson in a relativistic theory of composite particles”, ***Phys. Rev. D*, 111:3 (2025), 034034**.

$\langle r^2\rangle^{1/2}_{\text{mass}}$, fm	Reference	Approach
0.517	This work	Instant form RQM
0.52(2)	[35]	Empirical
0.47	[31]	Schwinger function
0.41 ± 0.01	[25]	Lattice
0.32–0.39	[19]	$\gamma^*\gamma \to \pi^0\pi^0$
≈0.39	[27]	Holography
0.31 ± 0.04	[21]	Sum rules
≈0.27	[20]	Nambu-Jona-Lasinio
0.244	[30]	Contact interactions

$$\langle r^2\rangle_{\text{mass}} = -6\frac{1}{A^{(\pi)}(Q^2)}\frac{dA^{(\pi)}}{dQ^2}\bigg|_{Q^2=0},$$

$$\langle r^2\rangle_{\text{mech}} = 6\frac{D^{(\pi)}(0)}{\int_0^\infty D^{(\pi)}(Q^2)dQ^2} = \frac{\int d^3r\, r^2 p_n(r)}{\int d^3r\, p_n(r)}$$

Y.-Z. Xu, K. Raya, Z.-F. Cui, C. D. Roberts, and J. Rodriguez-Quíntero, Empirical determination of the pion mass distribution, ***Chin. Phys. Lett.* 40, 041201 (2023).**

Таким образом, метод параметризации Широкова лежит в основе одной из успешных формулировок релятивистской составной модели которая благодаря этому методу обладает следующими отличительными чертами.

1.Матричные элементы электрослабого тока и тензора энергии-импульса составной системы автоматически удовлетворяют условиям релятивистской ковариантности.

2. Матричные элементы электромагнитного тока и тензора энергии-импульса удовлетворяют закону сохранения.

3. Релятивистское импульсное приближение формулируется на основе широковской параметризации матричных элементов операторов релятивистски инвариантным образом, а в случае электромагнитного тока и тензора энергии-импульса с учетом закона сохранения.

4. Описываемый подход к описанию составных систем дает естественный и правильный нерелятивистский предел, т. е. для него выполняется принцип соответствия.

5. Расчеты в данном подходе дают хорошее описание электрослабых и гравитационных свойств составных кварковых (легкие мезоны, мезоны, содержащие один тяжелый кварк) и составных нуклонных систем (дейтрон)

Спасибо за внимание!