Многочлены Эйлера и проблема нахождения кратности состояний многофононной системы

В.С.Замиралюв

Препринт НИИЯФ МГУ 2003–24/737

МОСКВА 2003

Московский Государственный Университет им. М.В.Ломоносова

Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д.В.Скобельцына

Многочлены Эйлера и проблема нахождения кратности состояний многофононной системы

В.С.Замиралов

Препринт НИИЯФ МГУ 2003–24/737

МОСКВА 2003

УДК 539.12

В.С.Замиралов

Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д.В.Скобельцына, Москва, Россия
e-mail: zamir@depni.npi.msu.su
Препринт НИИЯФ МГУ 2003–24/737

Многочлены Эйлера и проблема нахождения кратности состояний многофононной системы

Summary

On example of the many-phonon system with the spin 2 phonons it is shown that a problem of evaluation of the number of states with the definite value of the total momentum projection in the expansion of the direct product of several phonons with the momentum j is related to the expansion of the Euler polynomials.

Резюме

На примере многофононной системы с фононами спина 2 показано, что проблема нахождения кратности состояний с определенным значением проекции полного момента системы при разложении прямого произведения нескольких фононов спина j связана с разложением многочленов Эйлера.

В этой заметке будет показано, что проблема нахождения кратности состояний с определенным значением проекции полного углового момента системы при разложении прямого произведения нескольких фононов с угловым моментом j связана с разложением многочленов Эйлера.

Удобно продемонстрировать эту связь на хорошо известной задаче с прямым произведением нескольких фононов спина 2.

Итак, пусть дано прямое произведение угловых моментов $j = 2$ трех фононов. Проблема состоит в нахождении кратности состояний с определенным значением проекции J_z полного углового момента системы J.

Стандартным путем задача решается примерно следующим образом. Записываются возможные состояния (j_z^1, j_z^1, j_z^3), начиная с состояния с максимально возможной проекцией, последовательно уменьшая проекцию на единицу. Перебирая все возможные способы составить данное значение проекции полного углового момента 3-фононного состояния из проекций отдельных фононов ($j_z^k, k = 1, 2, 3$, (см., например, [?], [?]), получаем искомые кратности состояний для каждого определенного значениям проекции полного углового момента системы. Результат [в квадратных скобках] для значений проекции от J_z=6 до J_z=0 запишем следующим образом

(1-я цифра в круглых скобках означает величину проекции ($j_z^k, k = 1, 2, 3$, фонона спина j^k=2, 2-я цифра означает всюду один фонон и пишется для удобства):

J_z=6 [1] (2.1 2.1 2.1)

J_z=5 [1] (2.1 2.1 1.1)

J_z=4 [2] (2.1 2.1 0.1) (2.1 1.1 1.1)

J_z=3 [3] (2.1 2.1 -1.1) (2.1 1.1 0.1) (1.1 1.1 1.1)

J_z=2 [4] (2.1 2.1 -2.1) (2.1 1.1 -1.1) (2.1 0.1 0.1) (1.1 1.1 0.1)

J_z=1 [4] (2.1 1.1 -2.1) (2.1 0.1 -1.1) (1.1 0.1 0.1) (1.1 1.1 -1.1)

J_z=0 [5] (1.1 1.1 -2.1) (2.1 0.1 -2.1) (2.1 -1.1 -1.1)

(1.1 0.1 -1.1) (0.1 0.1 0.1)

(В квадратных скобках, как уже сказано, указана искомая кратность 3-фононного состояния с определенным J_z.)

Оказывается, решение для 3 фононов может быть сведено к задаче Эйлера о нахождении числа разбиений некоторых целых чисел некоторым определенным способом.

Удобно перейти от проекций $j_z^k, k = 1, 2, 3,$, которые могут принимать как положительные, так и отрицательные значения, к некоторому набору положительных целых чисел. Составим его следующим образом. Из проекции каждого фонона вычитается 3 ($(j_z^{max,k} + 1), k = 1, 2, 3$, для $j = 2$) с тем, чтобы избавиться от нулей и положительных чисел. Затем изменяются все знаки на обратные с тем, чтобы иметь дело только с положительными целыми числами. Для каждой данной проекции $J_z = j_z^1 + j_z^2 + j_z^3$ получаем число, равное $(-J_z+9)$, составленное из трех целых чисел от 1 до 5, вообще говоря, несколькими способами. Число 1 есть $(-j_z^{max,k}+3)$, а число 5 есть $(j_z^{max,k}+3)$. В итоге получается следующая последовательность чисел от 3 (соответствующему $J_z = 6$) до 9 (соответствующему $J_z = 0$), каждое из которых составлено из трех чисел:

$J_3 = 6$ 3=1+1+1;

$J_3 = 5$ 4=2+1+1;

$J_3 = 4$ 5=3+1+1, 5=2+2+1;

$J_3 = 3$ 6=4+1+1, 6=3+2+1, 6=2+2+2;

$J_3 = 2$ 7=5+1+1, 7=4+2+1, 7=3+2+2, 7=3+3+1;

$J_3 = 1$ 8=5+2+1, 8=4+3+1, 8=4+2+2, 8=3+3+2;

$J_3 = 0$ 9=5+3+1, 9=4+4+1, 9=5+2+2, 9=4+3+2, 9=3+3+3.

Это задача восходит к проблеме Эйлера о числе способов, которым можно построить заданное число из сложения целых чисел. Для ее решения он использовал бесконечную дробь [?]

$$\frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z) \quad \text{и} \quad \text{т.д.}}, \tag{1}$$

которое при выполнении деления разворачивается в выражение

$$\begin{aligned} 1 + z(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + \quad \text{и} \quad \text{т.д.}) \\ +z^2(x^2 + x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 3x^7 + 4x^8 + 4x^9 + \quad \text{и} \quad \text{т.д.}) \\ +z^3(x^3 + x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 4x^7 + 5x^8 + 7x^9 + 8x^{10} + \quad \text{и} \quad \text{т.д.}) + \quad \text{и} \quad \text{т.д.} \end{aligned} \tag{2}$$

Как показано в [?], решение задачи дается коэффициентом N при члене $z^m x^n$. А именно, число n может быть получено N способами сложением m чисел. Например, из содержащегося в 3-ей строке этого выражения одночлена

$$z^3(... + 7x^9 + ...)$$

видно, что число $n = 9$ может быть получено сложением трех ($m = 3$) целых чисел 7-ю различными способами. Действительно, имеем

9=5+3+1, 9=4+4+1, 9=5+2+2, 9=4+3+2, 9=3+3+3, 9=6+2+1, 9=7+1+1.

Сравнивая эти разложения с полученными нами выше, видим, что у Эйлера число членов на 2 больше, чем получено в нашем примере. Это происходит потому, что в нашем примере исключены разложения 9=6+2+1 и 9=7+1+1, поскольку мы ограничены числом 5, что есть просто число проекций фонона спина 2.

И если мы хотим свести задачу нахождения кратности сотояний для нашего случая 3-фононной задачи с фононами спина 2 к задаче Эйлера, то следует исключить из рассмотрения построение заданного числа числами большими 5. Иными словами, мы решаем задачу Эйлера, которая теперь звучит так: найти все способы построения чисел от 3 до 9 из трех целых чисел, причем допустимые числа суть 1,2,3,4,5. Она решается обращением к многочлену Эйлера вида конечной дроби

$$\frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z)}. \tag{3}$$

При делении это выражение даст произведение многочленов, в которых мы удерживаем члены вплоть до z^3 (у нас 3 фонона):

$$(1+xz+x^2z^2+x^3z^3+...)\times(1+x^2z+x^4z^2+x^6z^3+...)\times$$

$$(1+x^3z+x^6z^2+x^9z^3+...)\times(1+x^4z+x^8z^2+x^{12}z^3+...)\times(1+x^5z+x^{10}z^2+...).$$

Ограничение пятью сомножителями в знаменателе как раз и задаст требуемое условие о составлении заданного числа только из чисел 1,2,3,4,5. Остается перемножить эти многочлены и убедиться, что коэффициент N при члене x^nz^3, $3\le n\le 9$ даст кратность состояний системы из 3 фононов спина 2 с проекцией $(-n+9)$:

$$z^3(1\cdot x^3+1\cdot x^4+2\cdot x^5+3\cdot x^6+4\cdot x^7+4\cdot x^8+5\cdot x^9).$$

Вынося x^9 за скобку, получаем в скобках выражение, где множитель при x есть искомая кратность состояния с проекцией, равной $\pm$ степени x :

$$z^3\cdot x^9(1\cdot x^{-6}+1\cdot x^{-5}+2\cdot x^{-4}+3\cdot x^{-3}+4\cdot x^{-2}+4\cdot x^{-1}+5\cdot x^0). \qquad (4)$$

Многочлен Эйлера (??) даст решение задачи о нахождении кратности полного углового момента системы фононов J с определенным значением проекции J_3 для произвольного числа фононов. Например, решение для случая произведения 4 фононов спина 2 сводится к следующей задаче: найти все способы построения чисел от 4 (соответствующему $J_3=8$) до 12 (соответствующему $J_3=0$), из четырех целых чисел, причем допустимые числа суть опять 1,2,3,4,5. Она решается с помощью многочлена (??), только теперь ищутся коэффициенты N при членах x^nz^4, $4\le n\le 12$, которые и дают кратности состояний системы из 4 фононов спина 2 с проекцией $\pm(-n+12)$:

$$z^4(1\cdot x^4+1\cdot x^5+2\cdot x^6+3\cdot x^7+5\cdot x^8+5\cdot x^9+7\cdot x^{10}+7\cdot x^{11}+8\cdot x^{12})=$$

$$z^4x^{12}(1\cdot x^{-8}+1\cdot x^{-7}+2\cdot x^{-6}+3\cdot x^{-5}+5\cdot x^{-4}+5\cdot x^{-3}+7\cdot x^{-2}+7\cdot x^{-1}+8\cdot x^0)=$$

Эти коэффициенты N равны числу способов, которыми можно построить заданное число (равное степени x) из целых чисел 1,2,3,4,5:

$J_3=8$ 4=1+1+1+1;

$J_3=7$ 5=2+1+1+1;

$J_3=6$ 6=3+1+1+1, 6=2+2+1+1;

$J_3=5$ 7=4+1+1+1, 7=3+2+1+1, 7=2+2+2+1;

$J_3=4$ 8=5+1+1+1, 8=4+2+1+1, 8=3+2+2+1, 8=2+2+2+2, 8=3+3+1+1;

$J_3=3$ 9=3+3+2+1, 9=5+2+1+1, 9=4+2+2+1, 9=3+2+2+2, 9=4+3+1+1;

$J_3=2$ 10=5+2+2+1, 10=5+3+1+1, 10=4+2+2+2,10=4+3+2+1,

10=4+4+1+1, 10=3+3+2+2, 10=3+3+3+1;

$J_3=1$ 11=5+3+2+1, 11=5+4+1+1, 11=5+2+2+2, 11=4+4+2+1, 11=4+3+3+1, 11=4+3+2+2, 11=3+3+3+2;

$J_3 = 0$ 12=5+4+2+1, 12=5+5+1+1, 12=5+3+2+2, 12=4+4+3+1,

12=5+3+3+1, 12=4+4+2+2, 12=4+3+3+2, 12=3+3+3+3.

Можно убедиться непосредственным вычислением, что число способов разбиения каждого из приведенных чисел от 4 до 12 на сумму чисел от 1 до 5 соответствует кратности 4-фононных состояний с проекцией полного момента от ± 8 до 0 (в квадратных скобках указана кратность состояния с определенным J_3):

J_3=8 [1] (2.1 2.1 2.1 2.1);

J_3=7 [1] (2.1 2.1 2.1 1.1);

J_3=6 [2] (2.1 2.1 2.1 0.1) (2.1 2.1 1.1 1.1) ;

J_3=5 [3] (2.1 2.1 2.1 -1.1) (2.1 2.1 1.1 0.1) (2.1 1.1 1.1 1.1) ;

J_3=4 [5] (2.1 2.1 2.1 -2.1) (2.1 2.1 1.1 -1.1) (2.1 2.1 0.1 0.1)

(2.1 1.1 1.1 0.1) (1.1 1.1 1.1 1.1);

J_3=3 [5] (2.1 2.1 1.1 -2.1) (2.1 2.1 0.1 -1.1) (2.1 1.1 0.1 0.1)

(2.1 1.1 1.1 -1.1) (1.1 1.1 1.1 0.1);

J_3=2 [7] (2.1 1.1 1.1 -2.1) (2.1 2.1 0.1 -2.1) (2.1 2.1 -1.1 -1.1)

(2.1 1.1 0.1 -1.1) (2.1 0.1 0.1 0.1) (1.1 1.1 1.1 -1.1)

(1.1 1.1 0.1 0.1);

J_3=1 [7] (2.1 1.1 0.1 -2.1) (2.1 2.1 -1.1 -2.1) (2.1 1.1 -1.1 -1.1)

(2.1 0.1 0.1 -1.1) (1.1 1.1 0.1 -1.1) (1.1 1.1 1.1 -2.1)

(1.1 0.1 0.1 0.1);

J_3=0 [8] (2.1 1.1 -1.1 -2.1) (2.1 2.1 -2.1 -2.1) (2.1 0.1 -1.1 -1.1)

(2.1 0.1 0.1 -2.1) (1.1 1.1 0.1 -2.1) (1.1 1.1 -1.1 -1.1)

(1.1 0.1 0.1 -1.1) (0.1 0.1 0.1 0.1).

Установленная связь между величиной кратности проекции полного углового момента системы частиц одинакового спина 2 и задачей Эйлера о числе разбиений заданного целого числа на сумму целых чисел носит общий характер и, понятно, не ограничивается рассмотренным здесь случаем фононов с угловым моментом равным 2. Помимо математического интереса, она представляет интерес как основа чрезвычайно простой программы для расчета соответствующих кратностей.

Автор благодарит И.М.Капитонова за обсуждение. Автор признателен С.С.Баранову за предоставление комплекса програм FORM [?], с помощью которых были рассчитаны и/или проверены приведенные здесь результаты.

Работа была выполнена при поддержке гранта Президента РФ НШ-1619.2003.2 для ведущих научных школ.

References

[1] S.Benedetti, Nuclear Reactions, J.Wiley & Sons, Inc., N-Y-London-Sydney, 1965.

[2] Б.С.Ишханов, И.М.Капитонов, В.Н.Орлин, Модели атомных ядер, Изд.МГУ, Москва, 1997.

[3] Л.Эйлер, Введение в анализ бесконечных, т.1, глава 16, Москва, Физматгиз, 1961.

[4] J.A.M.Vermaseren, Symbolic Manipulations with FORM (Computer Algebra), Nederland, Amsterdam, 1991.

Валерий Семенович Замиралов

Многочлены Эйлера и проблема нахождения кратности состояний многофононной системы

Работа поступила в ОНТИ 21.11.2003

ИД 00545 от 06.12.1999

Издательство
Учебно-научного центра довузовского образования

117246, Москва, ул. Обручева,55А
Тел./факс(095)718-6966
e-mail:izdat@abiturcenter.ru
http:/www.abiturcenter.ru

Гигиенический сертификат 77.99.2.925.П.9139.2.00 от 24.02.2000
Налоговые льготы - Общероссийский классификатор продукции
ОК-005-93, том1 - 953000

Заказное. Подписано к печати 21.11.2003 г. Формат 60×90/16
Бумага офсетная 2. Усл.печ.л. 0,3
Тираж 25 экз. Заказ 459
Отпечатано в Мини-типографии УНЦ ДО
в полном соответствии с качеством
предоставленного оригинал-макета