

Кубышин Ю.А., Ишханов Б.С., Посеряев А.В., Шведунов В.И.

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ И
ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФАЗОВОГО
ДВИЖЕНИЯ В РАЗРЕЗНОМ МИКРОТРОНЕ**

Препринт НИИЯФ МГУ – 2006 – 3/802

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ им. Д.В.СКОБЕЛЬЦЫНА

Кубышин Ю.А., Ишханов Б.С., Посеряев А.В., Шведунов В.И.

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ И
ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФАЗОВОГО
ДВИЖЕНИЯ В РАЗРЕЗНОМ МИКРОТРОНЕ**

Препринт НИИЯФ МГУ – 2006 – 3/802

Yu.A.Kubyshev, B.S.Ishkhanov, A.V.Poseryaev, V.I.Shvedunov
E-mail address: poseryaev@nm.ru

**ANALYTICAL STUDY AND NUMERICAL SIMULATION OF PHASE
MOTION IN RACE-TRACK MICROTRON**

Preprint INP MSU – 2006 – 3/802

Abstract

Implementation of low energy injection schemes in the race-track microtron (RTM) design requires a better understanding of the longitudinal beam dynamics. Differently to the high energy case a low-energy beam will slip in phase relative to the accelerating structure phase. We generalize the concept of equilibrium or synchronous particle for the case of non-relativistic energies. An analytical approach for the description of the synchronous phase slip is developed and explicit, though approximate, formulas which allow defining the equilibrium injection phase and fixing the parameters of the accelerator are derived. The approximation can be improved in a systematic way by calculating higher order corrections. The precision of the analytical approach is checked by direct numerical computations and was shown to be quite satisfactory. Explicit examples of injection schemes and fixing of RTM global parameters are presented.

Кубышев Ю.А., Ишханов Б.С., Посеряев А.В., Шведун В.И.

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ И ЧИСЛЕННОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ ФАЗОВОГО ДВИЖЕНИЯ В РАЗРЕЗНОМ
МИКРОТРОНЕ.**

Препринт НИИЯФ МГУ – 2006 – 3/802

Аннотация

Разработка систем инжекции низкоэнергетического пучка в разрезной микротрон, а также выбор основных параметров ускорителя требуют хорошего понимания динамики частиц в продольном фазовом пространстве, поскольку в отличие от ультрарелятивистского случая низкоэнергетический пучок испытывает скольжение по фазе относительно фазы ускоряющего СВЧ поля. В настоящей работе мы обобщаем понятие равновесной или синхронной частицы для случая низких энергий, а также предлагаем аналитический метод описания эффекта скольжения синхронной частицы по фазе, исходя из которого, получаются приближённые аналитические формулы, позволяющие с определённой точностью определять фазу инжекции равновесной частицы и основные параметры разрезного микротрона. Оказывается, что точность аналитического подхода, изученная нами с помощью прямых численных расчётов соответствующих параметров, оказывается достаточно высокой.

© Кубышев Ю.А., Ишханов Б.С., Посеряев А.В., Шведун В.И., 2006
© НИИЯФ МГУ, 2006 <http://www.sinp.msu.ru>

Оглавление.

ВВЕДЕНИЕ.....	4
§1. РАВНОВЕСНАЯ ФАЗА.	5
1.1. Уравнения фазового движения ультрарелятивистской равновесной частицы.	5
1.2. Уравнения фазового движения произвольной частицы с $\beta < c$	6
1.3. Равновесная частица.	7
§2. АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ФАЗЫ РАВНОВЕСНОЙ ЧАСТИЦЫ И ПАРАМЕТРОВ РАЗРЕЗНОГО МИКРОТРОНА.....	10
§3. МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РАСЧЕТА ФАЗЫ РАВНОВЕСНОЙ ЧАСТИЦЫ И ПАРАМЕТРОВ РАЗРЕЗНОГО МИКРОТРОНА.	14
§4. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЁТОВ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ ВЫРАЖЕНИЯМИ.	16
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.	19
ПРИЛОЖЕНИЕ. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ РАВНОВЕСНОЙ ЧАСТИЦЫ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ СТЕПЕНЬЮ ТОЧНОСТИ.....	19
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.	22

Введение.

Разрезной микротрон является особым типом ускорителя электронов, в котором объединены свойства линейного и циклического ускорителей [1,2]. Ускоритель может работать как в импульсном, так и в непрерывном режимах, его использование особенно эффективно в тех случаях, когда необходимо получить энергию электронного пучка в области 10-100 МэВ при умеренных значениях тока на выходе. Основные особенности фазового движения в разрезном микротроне, в частности, малая ширина области устойчивых фазовых колебаний, нелинейные резонансы, принципиально не отличаются от особенностей фазового движения в классическом микротроне [3-5]. Однако, наличие пространства дрейфа между поворотными магнитами, в котором располагается линейный ускоритель, а также краевого поля поворотных магнитов, приводят к появлению зависящего от энергии фазового сдвига, существенно влияющего на величину продольного акцептанса ускорителя и затрудняющего выбор начальных условий, таких как энергия и фаза инжектируемых частиц. В настоящее время основным методом выбора начальных условий является численное моделирование фазового движения с помощью специализированных программ [6,7]. Основной проблемой развития аналитических методов анализа фазового движения в разрезном микротроне, которые могли бы дать практически значимые результаты, является большой прирост энергии электронов за оборот и малое число орбит, что затрудняет применение методов теории возмущений, успешно используемых, например, при описании синхротронов и накопителей частиц.

Интенсивное развитие радиационных технологий открывает новые возможности использования разрезного микротрона в таких областях, как интраоперационная лучевая терапия, инспекция большегрузных контейнеров с распознаванием элементного состава содержимого, производство короткоживущих изотопов и т.д. В каждом конкретном случае необходима максимальная оптимизация параметров этого ускорителя для решения конкретной задачи, в частности, рабочей длины волны, равновесной фазы, прироста энергии за оборот, прироста кратности, обеспечивающая наиболее эффективное использование ускорителя. В этой связи, актуально развитие аналитических методов анализа динамики пучка в разрезном микротроне, которые позволили бы исследовать характеристики ускорителя, в зависимости от выбора его основных параметров, и которые бы дали начальное приближение для более точного численного анализа.

До сих пор единственным аналитическим способом оценки основных параметров разрезного микротрона являлось использование простых аналитических выражений [2], которые не учитывают отличие скорости частиц от скорости света в пространстве дрейфа между поворотными магнитами, а также влияние краевого поля магнитов на динамику частиц, то есть, по сути дела, не учитывают реальную физику ускорителя.

В настоящей работе излагается аналитический метод анализа фазового движения в разрезном микротроне с учётом зависящего от энергии сдвига фазы на участке дрейфа (но в отсутствие краевых полей магнитов), предлагается аналитический подход для определения основных параметров ускорителя, учитывающий эффект сдвига фазы, а также проводится сравнение полученных результатов с результатами численного моделирования.

§1. Равновесная фаза.

Рассмотрим продольное фазовое движение частиц в разрезном микротроне (см. рис. 1). Предположим, что расстояние между поворотными магнитами микротрона равно l , индукция магнитного поля магнитов равна B , а максимальное значение прироста энергии в ускоряющей структуре микротрона составляет ΔE_{\max} . Предположим также, что изменение энергии ΔE произвольной частицы при её взаимодействии с ускоряющей структурой происходит мгновенно (приближение бесконечно узкого ускоряющего зазора), а краевое поле на входе магнита отсутствует. В качестве переменных, описывающих динамику в продольном фазовом пространстве, выберем полную энергию частицы E и её фазу φ относительно ускоряющего СВЧ поля так, что $\Delta E = \Delta E_{\max} \cos \varphi$. Обозначим через (φ_n, E_n) значения переменных на n -ом обороте в некоторой произвольной, но фиксированной точке орбиты. Будем предполагать в дальнейшем, что в качестве такой точки выбрано начало ускоряющей структуры, а величины (φ_0, E_0) соответствуют фазе и энергии частицы на входе в структуру перед первым её прохождением.

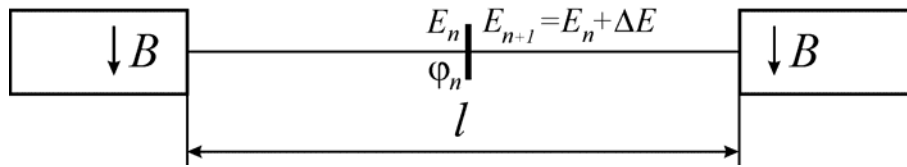


Рис. 1. Основные параметры разрезного микротрона.

1.1. Уравнения фазового движения ультррелятивистской равновесной частицы.

Рассмотрим сначала предельный случай, когда начальная энергия частиц достаточно велика, тогда электроны можно считать ультррелятивистскими, а их скорость равной $v = c$. Известно, что в этом случае можно ввести понятие равновесной или синхронной частицы [3]. Будем называть её в дальнейшем *равновесной* или *синхронной ультррелятивистской частицей*. Продольная динамика такой частицы характеризуется равновесной фазой φ_s и равновесным приростом энергии за оборот $\Delta E_s = \Delta E_{\max} \cos \varphi_s$. Параметры микротрона должны быть выбраны таким образом, чтобы выполнялось условие синхронизма

$$T_{n,s} = T_{RF} (\mu + \nu(n-1)), \quad (1)$$

где μ и ν – натуральные числа, определяющие режим работы ускорителя. Таким образом, время прохождения n -ой орбиты равновесной частицей $T_{n,s}$ должно быть кратно периоду ускоряющего СВЧ поля T_{RF} . Для рассматриваемой нами упрощённой схемы разрезного микротрона время прохождения n -ой орбиты можно записать в виде:

$$T_{n,s} = \frac{2l}{c} + \frac{2\pi r_{n,s}}{c} = \frac{2l}{c} + 2\pi \frac{E_{n,s}}{ec^2 B}, \quad (2)$$

где $r_{n,s}$ и $E_{n,s} = E_{0,s} + n\Delta E_s$ – радиус кривизны траектории равновесной частицы в поворотном магните и её энергия на n -ой орбите соответственно, а $E_{0,s}$ –

начальная энергия. Как видно из условия (1) параметр μ определяет условие синхронизма равновесной частицы, находящейся на первой орбите

$$T_{1,s} = \frac{2l}{c} + 2\pi \frac{E_{1,s}}{ec^2 B} = \frac{2l}{c} + 2\pi \frac{E_{0,s} + \Delta E_s}{ec^2 B} = \mu T_{RF}, \quad (3.1)$$

а параметром ν определяется прирост времени обращения равновесной частицы за оборот

$$\Delta T_s = T_{n+1,s} - T_{n,s} = 2\pi \frac{\Delta E_s}{ec^2 B} = \nu T_{RF}. \quad (3.2)$$

Введя постоянную для заданных параметров микротрона величину

$$B_0 = 2\pi \frac{mc^2}{\lambda ec},$$

где $\lambda = cT_{RF}$ – длина волны СВЧ поля, а m и e – масса покоя и заряд электрона соответственно, условие (IV.3.2) можно записать в виде

$$\frac{B_0}{B} \frac{\Delta E_s}{mc^2} = \nu. \quad (4)$$

Таким образом, для равновесной частицы связь между энергией и фазой после прохождения $(n+1)$ -ого оборота с энергией и фазой после прохождения n -ого оборота может быть записана в виде

$$E_{n+1,s} = E_{n,s} + \Delta E_{\max} \cos \varphi_{n,s}, \quad (5.1)$$

$$\varphi_{n+1,s} = \varphi_{n,s} + 2\pi \frac{T_{n+1,s}}{T_{RF}} \quad (5.2)$$

Запишем систему уравнений (5.1 – 5.2) в более удобной для дальнейшего анализа форме. В первую очередь следует учесть условие синхронизма для n -ой орбиты (1), из которого следует, что $2\pi T_{n,s} / T_{RF} = 2\pi(\mu + (n-1)\nu)$. Тогда из уравнения (5.2) нетрудно получить, что

$$\varphi_{n,s} = \varphi_s + 2\pi n [\mu + \nu(n-1)/2].$$

В таком случае $\Delta E_{\max} \cos \varphi_{n,s} = \Delta E_{\max} \cos \varphi_s = \Delta E_s$ и уравнения (5.1–5.2) принимают следующий вид

$$E_{n+1,s} = E_{n,s} + \Delta E_s, \quad (6.1)$$

$$\varphi_{n+1,s} = \varphi_{n,s} + K_0(E_{n+1,s}), \quad (6.2)$$

где функция K_0 определена как

$$K_0(E) = \frac{4\pi l}{\lambda} + 2\pi \nu \frac{E}{\Delta E_s} \quad (7)$$

и представляет собой прирост фазы равновесной ультррелятивистской частицы с энергией E за один оборот в микротроне.

Если начальная энергия электронов достаточно велика, их с самого начала можно считать релятивистскими. Из условий синхронного прохождения ускоряющего зазора (3.1) и (3.2) можно легко получить следующее соотношение для энергии инжекции:

$$E_{0,s} \equiv E_{0,s} \left(\frac{l}{\lambda} \right) = \frac{\Delta E_s}{\nu} \left(\mu - \nu - \frac{2l}{\lambda} \right) \quad (8)$$

1.2. Уравнения фазового движения произвольной частицы с $\beta < c$.

Рассмотрим теперь частицу, скорость которой v отлична от скорости света c , то есть $\beta = v/c < 1$. Время прохождения n -ой орбиты данной частицей равно

$$T_n = \frac{2l}{\beta(E_n)c} + \frac{2\pi r_n}{\beta(E_n)c} = \frac{2l}{\beta(E_n)c} + 2\pi \frac{E_n}{ec^2 B}, \quad (9)$$

где $\beta(E)$ – релятивистский фактор $\beta = v/c$, выраженный в терминах полной энергии

$$\beta(E) = \sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2}. \quad (10)$$

Рекуррентные соотношения между величинами (φ_{n+1}, E_{n+1}) и (φ_n, E_n) для произвольно выбранной частицы по аналогии с (6.1) и (6.2) можно записать в виде

$$E_{n+1} = E_n + \Delta E_{\max} \cos \varphi_n, \quad (11.1)$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + K(E_{n+1}), \quad (11.2)$$

где член $K(E_{n+1})$ равен приросту фазы частицы с энергией E_{n+1} за один оборот, $K(E_{n+1}) = 2\pi T_{n+1} / T_{RF}$, а функция $K(E)$ определяется формулой

$$K(E) = \frac{4\pi l}{\lambda} \frac{1}{\beta(E)} + 2\pi v \frac{E}{\Delta E_s}. \quad (12)$$

1.3. Равновесная частица.

Очевидно, что время T_n , определяемое выражением (9), не может удовлетворять резонансному условию (1) с целыми значениями величин μ и ν для всех n . Тем не менее, даже в этом случае можно ввести понятие *равновесной* или *синхронной частицы*. Её начальная фаза и энергия равны (φ_0, E_0) , а при неограниченном росте количества орбит $n \rightarrow \infty$ она бесконечно близко приближается к ультрарелятивистской равновесной частице с фазовыми координатами $(\varphi_s, E_{n,s})$, то есть $\varphi_n \rightarrow \varphi_s, E_n \rightarrow E_{n,s}$ (в данном случае при определении фазы φ_n отброшено слагаемое, кратное 2π). Фаза φ_n определённой таким образом равновесной частицы не является постоянной величиной, как в случае ультрарелятивистской равновесной частицы, а изменяется от оборота к обороту, стремясь к φ_s при $n \rightarrow \infty$. Будем в дальнейшем называть этот эффект *эффектом скольжения по фазе*. Покажем, что равновесная частица существует, и определим аналитические выражения, описывающие эволюцию равновесной фазы φ_n и равновесной энергии E_n .

Поскольку с ростом энергии координаты равновесной частицы в продольном фазовом пространстве должны стремиться к координатам ультрарелятивистской равновесной частицы, то целесообразно ввести новые переменные

$$W_n = E_n - E_{n,s}, \quad (13)$$

$$\psi_n = \varphi_n - \varphi_{n,s},$$

значения которых в таком случае должны стремиться к нулю при $n \rightarrow \infty$. Используя соотношения (6.1), (6.2) и (11.1), (11.2), нетрудно получить следующую систему разностных уравнений

$$W_{n+1} = W_n + \Delta E_s \left(\frac{\cos(\varphi_s + \psi_n)}{\cos \varphi_s} - 1 \right), \quad (14.1)$$

$$\psi_{n+1} = \psi_n + K(E_{n+1,s} + W_n) - K_0(E_{n+1,s}), \quad (14.2)$$

где асимптотическая равновесная энергия определяется выражением $E_{n,s} = E_{0,s} + n\Delta E_s$. Её значение неограниченно растёт с ростом количества орбит n , поэтому параметр

$$\varepsilon_n = \frac{\Delta E_s}{E_{n,s}} = \frac{1}{n + \frac{E_{0,s}}{\Delta E_s}} \quad (15)$$

является малой величиной при достаточно больших n . Решения же системы (13.1–13.2) могут быть найдены методом возмущений как разложения по малому параметру ε_n . Введем безразмерную переменную

$$w_n = 2\pi\nu W_n / \Delta E_s \quad (16)$$

и безразмерный параметр

$$\kappa = mc^2 / \Delta E_s, \quad (17)$$

тогда система разностных уравнений принимает вид

$$w_{n+1} = w_n + F(\psi_n), \quad (18.1)$$

$$\psi_{n+1} = \psi_n + \Delta K(\varepsilon_{n+1}, w_n), \quad (18.2)$$

где

$$F(\psi_n) = 2\pi\nu \left(\frac{\cos(\varphi_s + \psi_n)}{\cos \varphi_s} - 1 \right),$$

$$\Delta K(\varepsilon_n, w_n) = w_n + \frac{4\pi d}{\lambda} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \kappa^2 \varepsilon_n^2 \left(1 + \frac{w_n}{2\pi\nu} \varepsilon_n \right)^{-2}}} - 1 \right). \quad (19)$$

Считая значения переменных ψ_n и w_n малыми величинами, разложим функцию $F(\psi_n)$ в ряд по степеням ψ_n , а функцию $\Delta K(\varepsilon_n, w_n)$ в двойной ряд по степеням w_n и ε_n :

$$F(\psi_n) = -2\pi\nu \tan \varphi_s \cdot \psi_n + \pi\nu \psi_n^2 + \dots,$$

$$\Delta K(\varepsilon_n, w_n) = w_n + \frac{4\pi d}{\lambda} \left(\frac{1}{2} \kappa^2 \varepsilon_n^2 + \frac{3}{8} \kappa^4 \varepsilon_n^4 + \frac{5}{16} \kappa^6 \varepsilon_n^6 + \dots - \frac{1}{2\pi\nu} \kappa^2 \varepsilon_n^3 w_n + \dots \right). \quad (20)$$

Далее мы увидим, что по порядку величины $\psi_n \propto \varepsilon_n^3$, а $w_n \propto \varepsilon_n^2$. Поэтому в основном приближении, получаемом путём сохранения соответствующих членов в выражениях (20), система (18.1–18.2) становится системой линейных разностных уравнений

$$w_{n+1} = w_n - 2\pi\nu \tan \varphi_s \cdot \psi_n, \quad (21.1)$$

$$\psi_{n+1} = \psi_n + w_{n+1} + G_0(\varepsilon_{n+1}), \quad (21.2)$$

где функция $G_0(\varepsilon_n)$ имеет вид $G_0(\varepsilon_n) = (2\pi d / \lambda) \kappa^2 \varepsilon_n^2$. Из этой системы нетрудно получить следующее линейное неоднородное разностное уравнение относительно ψ_n :

$$\psi_{n+1} - 2(1 - \pi\nu \tan \varphi_s) \psi_n + \psi_{n-1} = G_0(\varepsilon_{n+1}) - G_0(\varepsilon_n), \quad (22)$$

однородная часть которого представляет собой линеаризованное уравнение продольной динамики частиц в микротроне для отклонения по фазам от равновесного значения (см. [2]).

Решение неоднородного уравнения (22) можно представить как суперпозицию общего решения однородного и частного решения неоднородного уравнений.

Определяя набег фазы синхротронных колебаний за один оборот в ускорителе Q соотношением

$$\cos Q = 1 - \pi v \tan \varphi_s, \quad (23)$$

общее решение однородного уравнения может быть записано в виде

$$\psi_n = C_1 \tau_1^n + C_2 \tau_2^n, \quad (24)$$

где $\tau_{1,2} = \exp(\pm iQ)$ – решения характеристического уравнения $\tau^2 - 2 \cos Q \tau + 1 = 0$, а C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Решение (24) можно представить в эквивалентной форме, которая более наглядно выражает факт совершения частицей синхротронных колебаний

$$\psi_n = C \sin(Qn + \chi_0). \quad (25)$$

Постоянные интегрирования C и χ_0 определяются начальными условиями. Общее решение однородного уравнения относительно w_n можно найти из (21.2) (без учёта слагаемого $G_0(\varepsilon_{n+1})$)

$$w_n = C \sqrt{2\pi v \tan \varphi_s} \cos(Qn + \chi_0 - Q/2). \quad (26)$$

Поскольку по определению равновесная частица не должна совершать синхротронных колебаний, то эффект скольжения по фазе определяется лишь частным решением неоднородного уравнения. Для нахождения этого решения представим переменную ψ_n в виде

$$\psi_n = a_3 \varepsilon_n^\alpha + O(\varepsilon_n^{\alpha+1})$$

и подставим ее в уравнение (22), приняв во внимание, что

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n - \varepsilon_n^2 + \varepsilon_n^3 + O(\varepsilon_n^4),$$

$$\varepsilon_{n-1} = \varepsilon_n + \varepsilon_n^2 + \varepsilon_n^3 + O(\varepsilon_n^4).$$

В итоге получаем, что $\alpha = 3$, и в основном приближении решение для ψ_n имеет вид

$$\psi_n = -\frac{2l}{\lambda v \tan \varphi_s} \kappa^2 \varepsilon_n^3 + O(\varepsilon_n^4). \quad (27)$$

Из (21.2) нетрудно получить основное приближение для w_n

$$w_n = -\frac{2\pi l}{\lambda} \kappa^2 \varepsilon_n^2 + O(\varepsilon_n^4). \quad (28)$$

Следует отметить, что в разложениях ψ_n и w_n по степеням ε_n можно найти любое количество слагаемых. Предлагаемая для этого процедура представлена в Приложении.

Таким образом, полное решение системы уравнений (17.1–17.2) имеет вид

$$\tilde{\psi}_n = C \sin(Qn + \chi_0) - \frac{2l}{\lambda v \tan \varphi_s} \kappa^2 \varepsilon_n^3 + O(\varepsilon_n^4), \quad (29)$$

$$\tilde{w}_n = C \sqrt{2\pi v \tan \varphi_s} \cos(Qn + \chi_0 - Q/2) - \frac{2\pi l}{\lambda} \kappa^2 \varepsilon_n^2 + O(\varepsilon_n^4). \quad (30)$$

В общем случае произвольно выбранная частица, захваченная в режим ускорения (то есть частица, для которой ε_n является малой величиной при достаточно больших значениях n), испытывает *скольжение по фазе и по энергии*, описываемое вторым слагаемым в правой части уравнений (29) и (30), совершая при этом синхротронные колебания по закону синуса или косинуса, которым соответствуют первые слагаемые в правой части уравнений (29) и (30). Среди всех возможных начальных условий можно выбрать такие, при которых амплитуда синхротронных колебаний окажется равной нулю, то есть $C=0$. В этом

случае фазовая траектория частицы с ростом числа орбит n будет монотонно приближаться к фазовой траектории релятивистской равновесной частицы, то есть $\varphi_n \pmod{2\pi} \rightarrow \varphi_s, E_n \rightarrow E_{n,s}$. Частицу, траектория которой обладает этим свойством, будем в дальнейшем называть *равновесной или синхронной частицей*. В линейном приближении частица с произвольными начальными условиями будет совершать фазовые колебания вокруг равновесной. Формулы, описывающие фазовую траекторию *равновесной частицы*, могут быть получены из выражений (27), (28) с учётом (15–17):

$$\varphi_n = \varphi_{n,s} - \frac{2l}{\lambda v \tan \varphi_s} \frac{\Delta E_s}{mc^2} \left(\frac{mc^2}{E_{n,s}} \right)^3 + O(\varepsilon_n^4), \quad (31)$$

$$E_n = E_{n,s} - \frac{l}{\lambda v} \Delta E_s \left(\frac{mc^2}{E_{n,s}} \right)^2 + O(\varepsilon_n^4). \quad (32)$$

Эти же формулы, но с высшими поправками по ε_n приведены в Приложении.

§2. Аналитический метод расчета фазы равновесной частицы и параметров разрезного микротрона.

При инжекции электронов в ускоритель необходимым требованием является согласование эмиттанса пучка с аксептансом ускорителя. Существование синхронной частицы позволяет использовать в качестве координат в продольном фазовом пространстве не полную энергию \tilde{E}_n и фазу $\tilde{\varphi}_n$ частиц относительно ускоряющего СВЧ поля на n -ом обороте, а их отклонения от синхронных значений $\delta\varphi_n = \tilde{\varphi}_n - \varphi_n, \delta E_n = \tilde{E}_n - E_n$. Положение равновесной частицы при этом совпадает с началом координат. В идеальном случае, когда все частицы пучка имеют одинаковые энергии и фазы (эмиттанс изображается точкой на фазовой плоскости), оптимальным вариантом является инжекция в точку на фазовой плоскости, соответствующую равновесной частице. Но, поскольку в реальных условиях эмиттанс является конечной величиной, инжекция должна быть выполнена таким образом, чтобы эмиттанс пучка был по форме подобен аксептансу ускорителя, а положение его “центра тяжести” совпадало с положением равновесной частицы (см. рис. 2). В этом случае нелинейные искажения фазового портрета пучка будут минимальны и можно с наибольшей вероятностью гарантировать сохранность пучка в процессе ускорения при уменьшении в силу различного рода причин реального аксептанса ускорителя.

Предположим, что все геометрические и физические параметры микротрона уже заданы, то есть фиксированы значения величин $\lambda, \mu, \nu, l, \Delta E_{\max}, \varphi_s$. Тогда, как следует из выражений (31) и (32), оказывается заданной и фазовая траектория равновесной частицы (в данном случае следует помнить, что энергия асимптотической ультрарелятивистской равновесной частицы на n -ой орбите $E_{n,s} = E_{0,s} + n\Delta E_s$ однозначно задается указанными величинами). В частности, однозначно определёнными оказываются её энергия и фаза перед первым прохождением ускоряющей структуры. А именно:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \varphi_s + \psi_0 \left(\frac{l}{\lambda} \right), \\ E_0 &= E_{0,s} \left(\frac{l}{\lambda} \right) + \frac{\Delta E_s}{2\pi\nu} w_0 \left(\frac{l}{\lambda} \right), \end{aligned} \quad (33)$$

где функция $E_{0,s}(l/\lambda)$, определяющая энергию асимптотической синхронной частицы, даётся формулой (8). В общем случае функции ψ_0 и w_0 неизвестны, в первом приближении они были получены в предыдущем разделе и даются формулами

$$\begin{aligned}\psi_0\left(\frac{l}{\lambda}\right) &= -\frac{2l}{\lambda v} \frac{\kappa^2}{\tan \varphi_s} \varepsilon_0^3 + O(\varepsilon_0^4) = -\frac{2v^2}{\tan \varphi_s} \left(\frac{mc^2}{\Delta E_s}\right)^2 \frac{l}{\lambda} \frac{1}{\left(\mu - v - 2\frac{l}{\lambda}\right)^3} + O(\varepsilon_0^4), \\ w_0\left(\frac{l}{\lambda}\right) &= -\frac{2\pi l}{\lambda} \kappa^2 \varepsilon_0^2 + O(\varepsilon_0^4) = -2\pi v^2 \left(\frac{mc^2}{\Delta E_s}\right)^2 \frac{l}{\lambda} \frac{1}{\left(\mu - v - 2\frac{l}{\lambda}\right)^2} + O(\varepsilon_0^4),\end{aligned}\tag{34}$$

следующими из соотношений (27), (28), где была учтена зависимость ε_0 от l/λ через соотношения (8), (15) (см. также (31), (32)). Если $\varepsilon_0 \ll 1$, то это приближение дает уже достаточно точный результат. В противном случае следует учесть высшие поправки (см. Приложение). В настоящем разделе для нас важно, что ψ_0 и w_0 существуют и являются функциями, для которых зависимость от расстояния между поворотными магнитами l и длиной волны СВЧ поля λ входит лишь в виде комбинации l/λ , что является проявлением свойства масштабной симметрии разрезного микротрона относительно этих параметров. Хотя в конкретных примерах длина волны будет предполагаться фиксированной, наличие такой симметрии позволяет легко пересчитать наши результаты на случай других значений λ . Заметим, что функции ψ_0 и w_0 дают значения точного решения неоднородного уравнения при $n = 0$.

Поскольку положение пучка на фазовой плоскости при оптимальной инжекции однозначно связано с положением равновесной частицы, то, задав значения параметров λ , μ , v , l , ΔE_{\max} , φ_s , мы тем самым задаём оптимальные значения энергии и фазы инжекции пучка. Отметим, что если начальная энергия электронов достаточно велика, то оптимальная фаза инжекции при этом равна просто φ_s , а скольжение по фазе равновесной частицы пренебрежимо мало.

На практике в подавляющем большинстве случаев начальная энергия электронов не столь велика, чтобы можно было пренебречь эффектом скольжения по фазе, поэтому параметры $(\varphi_s, E_{0,s})$ не позволяют получить даже приблизительную оценку для оптимальных условий инжекции. При неоптимальной инжекции пучок может оказаться как вне области акцептанса (рис. 3(I)), что приведёт к полной потере частиц, так и в пределах акцептанса недалеко от его границы (рис. 3(II)), что приведет к нелинейным искажениям фазового портрета пучка и увеличит вероятность потери частиц из-за отличия реального акцептанса ускорителя от расчётного. Как следует из выражений (29), (30), для того, чтобы согласовать положение “центра тяжести” эмиттанса инжектируемого пучка с положением равновесной частицы необходимо удовлетворить два начальных условия, фиксируя параметры C и χ_0 так, чтобы исключить возбуждение синхротронных колебаний. Ясно, что полное согласование возможно произвести только если имеется два свободных параметра. Параметры λ , v и φ_s полагаем фиксированными. Выбор φ_0 в качестве одного из свободных параметров очевиден. В качестве второго параметра, в зависимости от схемы построения ускорителя, могут быть выбраны либо энергия инжекции, либо расстояние между поворотными магнитами. В разрезном микротроне с достаточно высокой энергией инжекции от отдельного ускорителя с

регулируемой энергией, естественно выбрать в качестве второго свободного параметра энергию инжекции [8]. Если в разрезной микротрон инжектируется нерелятивистский пучок от электронной пушки, энергией инжекции является энергия пучка на выходе линейного ускорителя после первого прохождения, которая определяется уровнем ускоряющего поля и практически не может варьироваться [9]. В этом случае в качестве второго свободного параметра необходимо выбирать расстояние между поворотными магнитами. Именно этот случай мы исследуем в дальнейшем, учитывая, что отмеченные выше новые области приложения разрезного микротрона, безусловно, требуют ускорителя с максимально простой конструкцией.

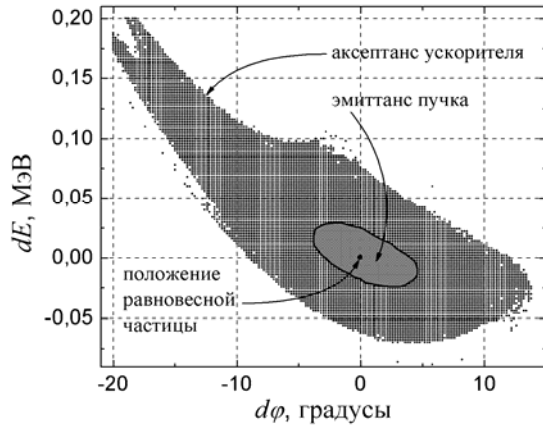


Рис. 2. Продольное фазовое пространство в координатах $(d\varphi, dE)$.

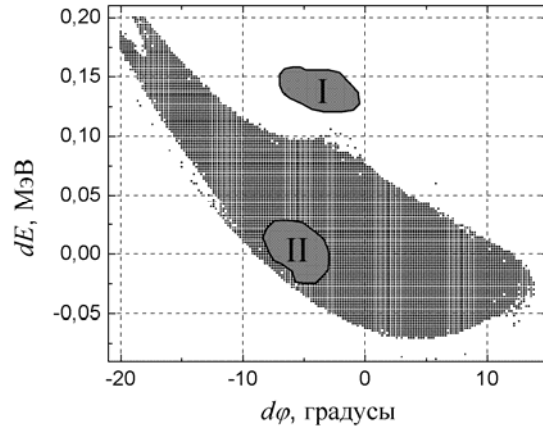


Рис. 3. I – пучок, инжектированный в область вне аксептанса ускорителя; II – пучок, инжектированный в область аксептанса близко к его границе.

Таким образом, при расчете разрезного микротрона необходимо располагать некоторой процедурой, которая, аналогично случаю ультрарелятивистского пучка, позволяла бы находить значения параметров l и φ_0 . В качестве такой процедуры можно использовать следующий метод.

Рассмотрим выражения (31) и (32). Они являются приближёнными и, как уже отмечалось ранее, их можно уточнить до любой степени по $(\Delta E_s/E_{n,s})$ или по $(mc^2/E_{n,s})$ (см. Приложение). Очевидно, что чем меньше номер оборота, на котором их применяют при конечном числе слагаемых в правой части, тем хуже точность получаемых величин φ_n, E_n . Точность также ухудшается с уменьшением отношения E_0/mc^2 . На первый взгляд, можно было бы воспользоваться формулами (33) и (34) при $n=0$ и получить систему уравнений относительно φ_0 и l для заданной энергии инжекции E_0 . В зависимости от точности взятых выражений решение полученной системы можно найти либо аналитически, либо численно. Этот способ расчета применим только при большой начальной энергии пучка, когда $E_0/mc^2 \gg 1$, а $\varphi_0 \approx \varphi_s, E_0 \approx E_{0,s}$. В противном случае ряды в правых частях выражений (34) будут иметь слишком слабую сходимость, что не позволит получить удовлетворительный результат. В такой ситуации более эффективным оказывается использовать соотношения типа (31), (32) для орбит с более высоким номером n , после чего, используя рекуррентные соотношения, определить начальные значения энергии и фазы.

В качестве иллюстрации этого метода рассмотрим случай с $n = 1$. С помощью предварительного анализа (см. Приложение) нетрудно определить оптимальное количество слагаемых в разложениях (31) и (32), которые удовлетворительным образом аппроксимируют значения фазы и энергии равновесной частицы при $n=1$. Так, например, для частного случая $\varepsilon_0 \approx 0.8, \kappa \approx 0.25$ [10], в котором энергия инжекции по порядку величины равна энергии покоя электрона и практически равна равновесному приросту энергии за оборот (следовательно, сходимость рядов для φ_n и E_n в данном случае наихудшая), достаточно учесть слагаемые $(\Delta E_s / E_{n,s})^4$. В соответствии с этим для равновесной частицы в конце первой орбиты можно записать

$$\varphi_1 = \varphi_s + \psi_1\left(\frac{l}{\lambda}\right), \quad (35)$$

$$E_1 = E_{1,s} + \frac{\Delta E_s}{2\pi\nu} w_1\left(\frac{l}{\lambda}\right), \quad (36)$$

где функции $\psi_1(l/\lambda)$ и $w_1(l/\lambda)$ определяются аналогично функциям $\psi_0(l/\lambda)$ и $w_0(l/\lambda)$ в (34), но с заменой ε_0 на ε_1 . В соотношении (35) вместо значения $\varphi_{1,s}$ использовано значение φ_s , поскольку разница между ними кратна 2π , и это не может повлиять на итоговый результат, так как важна лишь величина $\cos\varphi$. С другой стороны, при заданной энергии инжекции E_0 из (11.1) и (11.2) имеем

$$\varphi_1 = \varphi_0 + K(E_1), \quad (37)$$

$$E_1 = E_0 + \Delta E_s \frac{\cos\varphi_0}{\cos\varphi_s}. \quad (38)$$

Учитывая масштабную инвариантность относительно изменений значений расстояния между поворотными магнитами l и длины волны ускоряющего СВЧ поля λ , в качестве независимой переменной в выражениях (35), (36) выберем параметр l/λ . Выразив φ_0 из (37) и учтя при этом соотношение (35), получим

$$\varphi_0 = \varphi_s + \psi_1\left(\frac{l}{\lambda}\right) - K\left(E_1\left(\frac{l}{\lambda}\right)\right). \quad (39)$$

Используя формулы $E_{1,s} = E_{0,s} + \Delta E_s$ и (33), соотношение (36) для $E_1(l/\lambda)$ может быть записано в виде

$$E_1 = \frac{\Delta E_s}{\nu} \left(\mu - 2 \frac{l}{\lambda} \right) + \frac{\Delta E_s}{2\pi\nu} w_1\left(\frac{l}{\lambda}\right). \quad (40)$$

Подставляя это выражение в равенство (38), приходим к окончательному уравнению относительно l/λ :

$$\frac{1}{\nu} \left(\mu - 2 \frac{l}{\lambda} \right) + \frac{1}{2\pi\nu} w_1\left(\frac{l}{\lambda}\right) = \frac{E_0}{\Delta E_s} + \frac{1}{\cos\varphi_s} \cos\left(\varphi_s + \psi_1\left(\frac{l}{\lambda}\right) - K\left(E_1\left(\frac{l}{\lambda}\right)\right) \right), \quad (41)$$

решение которого легко находится с помощью стандартных численных методов. Определив таким образом отношение l/λ , находим фазу инжекции равновесной частицы φ_0 по формуле (39). В итоге, для данной длины волны СВЧ поля получаем искомые оценочные значения для пары величин φ_0, l .

§3. Метод численного расчета фазы равновесной частицы и параметров разрезного микротрона.

Система рекуррентных уравнений (11.1–11.2) для произвольных начальных координат частицы φ_0 и E_0 может быть решена численными методами. Результаты численных оценок показаны на рисунках 3–8. Получающиеся при этом фазовые траектории при заданном числе орбит для фазовых переменных E_n , φ_n можно разделить на три основных группы:

1) Неустойчивые, когда инжектируемая частица не попадает в область на фазовой плоскости, занимаемую акцептансом микротрона (см. рис. 3(I)), выходит из режима резонансного ускорения и теряется на стенках вакуумной камеры на нескольких первых орбитах.

2) Устойчивые, при которых частица попадает в область акцептанса ускорителя, но при этом ее фаза и энергия отличаются от равновесных значений (φ_0, E_0) , что приводит в процессе ускорения к устойчивым фазовым колебаниям относительно значений (φ_n, E_n) (см. например рис. 4(II)).

3) Равновесное. В этом случае начальные координаты частицы совпадают с (φ_0, E_0) , то есть она оказывается синхронной, и в процессе ускорения наблюдается лишь скольжение частицы по фазе и по энергии (см. например рис. 4(I)).

Таким образом, численные оценки, в полном соответствии с теоретическими результатами, полученными в п. 1.3, подтверждают существование равновесной частицы. В практических расчетах разрезных микротронов равновесные параметры пучка и ускорителя можно определить, следуя процедуре, описанной в §2. Однако, так как функции $\psi_1(l/\lambda)$ и $w_1(l/\lambda)$ известны лишь приближенно, то для повышения надежности расчетов, желательно располагать альтернативным численным методом определения начальных координат равновесной частицы. В данном разделе приводится описание этого метода, его сравнение с аналитической схемой расчета дано в §4.

Так же, как и в предыдущем разделе, рассмотрим ситуацию, когда для фиксированных величин λ , ν , ΔE_{\max} , и φ_s задается энергия инжекции E_0 , а условие отсутствия синхротронных колебаний удовлетворяется путём подбора соответствующих значений расстояния между поворотными магнитами l и начальной фазы частицы φ_0 . Изначально расстояние l выбирается таким образом, чтобы было достаточно места для размещения ускоряющей структуры, фокусирующих линз, корректоров пучка и прочих элементов микротрона. Если бы энергия частицы на первой орбите $E_{1,s} = E_{0,s} + \Delta E_s \gg mc^2$, то соответствующее значение кратности ускорения на первой орбите μ можно было бы определить из условия (3.1). Так как на практике частица на первой орбите обычно еще далека от ультрарелятивистского режима, то для определения μ можно воспользоваться формулой

$$E_{n,s} = \frac{\Delta E_s}{\nu} \left(\mu - (n-1)\nu - \frac{2l}{\lambda} \right), \quad (42)$$

аналогичной формуле (3.1), но записанной для орбиты с достаточно большим n таким, что равновесная частица является уже ультрарелятивистской и её энергия достаточно близка к значению $E_{n,s}$, которое рассчитывается по формуле (32). При этом, в соответствии с соотношением (8) оказывается заданным и значение величины $E_{0,s}$, вообще говоря, не равной энергии инжекции E_0 . Напомним, что

физический смысл параметра $E_{0,s}$ – начальная энергия гипотетической ультррелятивистской равновесной частицы, чья динамика описывается релятивистскими соотношениями (6.1), (6.2) и которая служит релятивистским пределом для реальной, то есть изначально нерелятивистской равновесной частицы. В силу относительной произвольности выбора величины l , получаемое при этом значение кратности μ не является в общем случае целым числом, поэтому для дальнейших расчётов μ принимается равной ближайшему целому числу, при этом начальное значение l_{init} определяется, исходя из (42). Отметим, что на практике удовлетворительные значения l_{init} могут быть получены также по формуле (3.1), в которой в качестве $E_{0,s}$ использована энергия инжекции E_0 . Выбранное значение l_{init} , являющееся функцией μ , будем обозначать как $l(\mu)$.

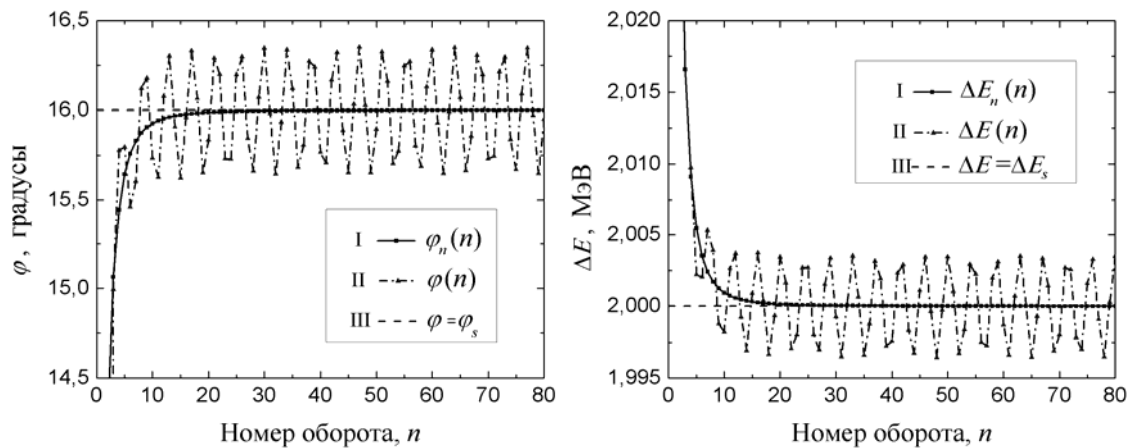


Рис.4. Зависимость фазы частицы φ_n (относительно ускоряющего СВЧ поля) и прироста энергии за оборот ΔE_n от номера оборота.

- I** – зависимости равновесной фазы φ_n и равновесного прироста энергии ΔE_n , полученные в результате минимизации функционала (43) относительно l и φ_0 ;
- II** – зависимости фазы φ_n и прироста энергии за оборот ΔE_n для устойчивой частицы, имеющей произвольные отклонения начальных фазовых координат от равновесных значений;
- III** – асимптотическая равновесная фаза φ_s и асимптотический равновесный прирост энергии ΔE_s (равновесные параметры ультррелятивистской частицы).

Для поиска оптимального расстояния между поворотными магнитами достаточно проанализировать интервал значений $[l(\mu-1), l(\mu+1)]$ по l . Отметим, что при нерелятивистской энергии инжекции и при $l = l(\mu-1)$ или $l = l(\mu+1)$ условие синхронного прохождения частицей первой орбиты $T_1 = \mu T_{RF}$ заведомо не будет выполнено. Поиск же равновесной фазы удобно производить на интервале $\varphi_0 \in [0, 2\pi]$, рассматривая тем самым все возможные значения φ_0 , так как в случае низкой энергии инжекции отличие φ_0 от φ_s может достигать нескольких десятков градусов. По определению синхронная частица не должна совершать фазовых колебаний, следовательно, решение задачи о нахождении равновесной траектории сводится к минимизации функционала

$$f[\varphi_n(l, \varphi_0)] = \sum_{n=n_0}^{n_1} (\varphi_n(l, \varphi_0) \bmod 2\pi - \varphi_s)^2, \quad (43)$$

представляющего собой сумму квадратов отклонений фазы φ_n пробной частицы, отвечающей некоторым значениям l и φ_0 , от асимптотической синхронной фазы φ_s за $N = n_1 - n_0 + 1$ оборотов. Здесь n_0 – номер орбиты, начиная с которой производится суммирование, а n_1 – номер орбиты, на которой суммирование заканчивается. Выбрав достаточно большое значение N , поиск минимума функционала (43) удобно произвести методом градиентного спуска с предварительным поиском стартовой точки на некоторой сетке начальных значений $l \in [l(\mu-1), l(\mu+1)]$ и $\varphi_0 \in [0, 2\pi]$. В качестве примера на рисунке 4(I) представлены результаты вычислений для случая $\lambda=5$ см, $\nu=1$, $\Delta E_{\max}=2.08$ МэВ, $E_0=2.536$ МэВ, $\varphi_s=16^\circ$, $l_{\text{init}}=25$ см. Полученные равновесные значения l и φ_0 равны соответственно $l = 24.13928$ см, $\varphi_0 = 4.94147^\circ$. Как видно, отличие фазы инжекции равновесной частицы φ_0 от фазы инжекции релятивистской равновесной частицы φ_s составляет в данном случае более 11° .

Отметим, что аналогичные результаты получаются, если в качестве минимизируемого функционала использовать

$$f_1[E_n(l, \varphi_0)] = \sum_{n=n_0}^{n_1} (\Delta E_n(l, \varphi_0) - \Delta E_s)^2,$$

где $\Delta E_n \equiv E_n - E_{n-1}$ – прирост энергии за n -ый оборот.

§4. Сравнение результатов численных расчётов с аналитическими выражениями.

В дальнейшем условимся называть отвечающие равновесной траектории значения l , φ_0 , φ_n , E_n и ΔE_n , полученные в результате численных расчётов, точными значениями, так как погрешность решения системы рекуррентных уравнений (11.1–11.2) пренебрежимо мала и определяется лишь вычислительной точностью ЭВМ. Значения параметров, получаемых по формулам (31), (32) и (39), (41), будем называть аналитическим приближенным решением для равновесной траектории. Для аналитических вычислений используем разложения в формулах с точностью до $(\Delta E_s/E_{n,s})^4$, являющиеся наилучшим приближением (см. Приложение). Приведем сравнение приближенных решений с точными значениями для случая $\lambda=5$ см, $\nu=1$, $\Delta E_{\max}=2.08$ МэВ, $\varphi_s=16^\circ$, $l_{\text{init}}=25$ см, при этом $\kappa = 0.255$. Проанализируем два примера с различными энергиями инжекции:

- а) $E_0^{(1)}=12.536$ МэВ, $\mu = 17$ и
- б) $E_0^{(2)}=2.536$ МэВ, $\mu = 12$.

Зависимости точных и аналитических приближенных выражений равновесных решений φ_n и ΔE_n от номера оборота n представлены на рисунках 5 и 6.

Начнем с примера (а). Как видно из рисунка 5 аналитические выражения оказываются весьма точными уже при $n=0$, что, конечно, связано с тем, что $\kappa < 1$, значение параметра ε_0 мало: $\varepsilon_0 \approx 0.16$, и поэтому ведущее приближение в (27), (28) оказывается достаточно хорошим. Полученные точные значения параметров l и φ_0 составляют $l_* = 24.31124$ см, $\varphi_{0*} = 15.63061^\circ$. Согласно процедуре, описанной в §2, для получения приближенного аналитического результата требуется разрешить уравнение (41) относительно l/λ . Простые вычисления дают $(l/\lambda)_{\text{th}} \approx 4.86220$, что приводит к значению расстояния между поворотными

магнитами $l_{th} = 24.31099$ см. Используя теперь формулы (39) и (40), получаем значение равновесной фазы инжекции $\varphi_{0,th} = 15.59940 \pmod{2\pi}$. Таким образом, точности определения l и φ_0 оказываются равными $|l_* - l_{th}|/l_* \sim 10^{-5}$ и $|\varphi_{0*} - \varphi_{0,th}| \sim 0.03^\circ$. Степень точности аналитического метода нахождения равновесного решения можно оценить также непосредственно, исходя из решения (φ_n, E_n) системы уравнений (11.1–11.2) с начальными значениями $l = l_{th}$, $\varphi_0 = \varphi_{0,th}$. На рисунке 7 представлены φ_n , $\Delta E_n = E_n - E_{n-1}$ для полученного таким образом решения, а также его сравнение с точным решением системы. Как видно, точности аналитического метода достаточно, чтобы отыскать частицу, совершающую устойчивые синхротронные колебания. Амплитуда устойчивых колебаний теоретической равновесной фазы относительно точной не превышает $\delta\varphi_n = 0.04^\circ$, а соответствующая амплитуда колебаний равновесного прироста энергии не превышает $\delta(\Delta E_n) = 4 \cdot 10^{-4}$ МэВ, что ещё раз доказывает хорошую точность аналитических выражений при относительно большой энергии инжекции.

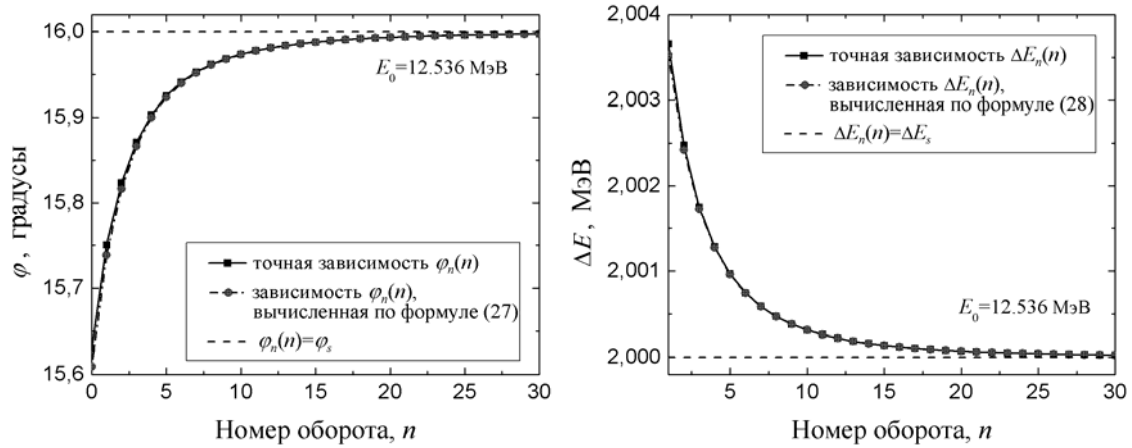


Рис. 5. Зависимость равновесной фазы частицы φ_n и равновесного прироста энергии за оборот ΔE_n от номера оборота n для $E_0=12.536$ МэВ.

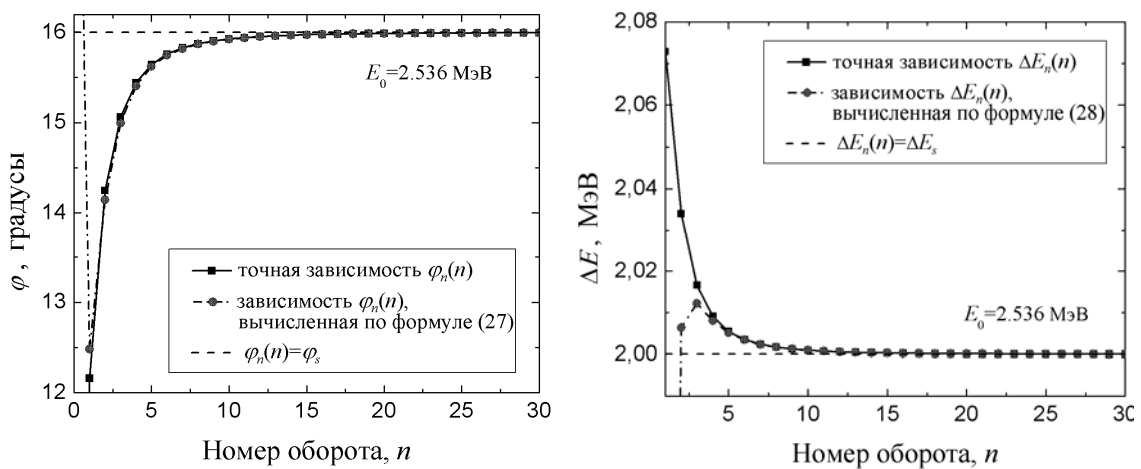


Рис. 6. Зависимость равновесной фазы частицы φ_n и равновесного прироста энергии за оборот ΔE_n от номера оборота n для $E_0=2.536$ МэВ.

Рассмотрим теперь пример (б). Значения l и φ_0 , полученные минимизацией функционала (43), равны в данном случае $l_* = 24.13928$ см, $\varphi_{0*} = 4.94147^\circ$. Решение уравнения (41) дает значение $l_{th} = 24.17198$ см, что приводит к $\varphi_{0,th} = -0.78873^\circ \pmod{2\pi}$. Соответствующие точности определения l и φ_0 составляют $|l_* - l_{th}|/l_* \sim 10^{-3}$ и $|\varphi_{0*} - \varphi_{th}| \sim 6^\circ$. Более низкая по сравнению с предыдущим примером точность теоретического метода обусловлена относительно большим значением параметра $\varepsilon_1 \approx 0.4$. Но, тем не менее, даже в этом случае аналитические выражения позволяют найти частицу, совершающую устойчивые фазовые колебания.

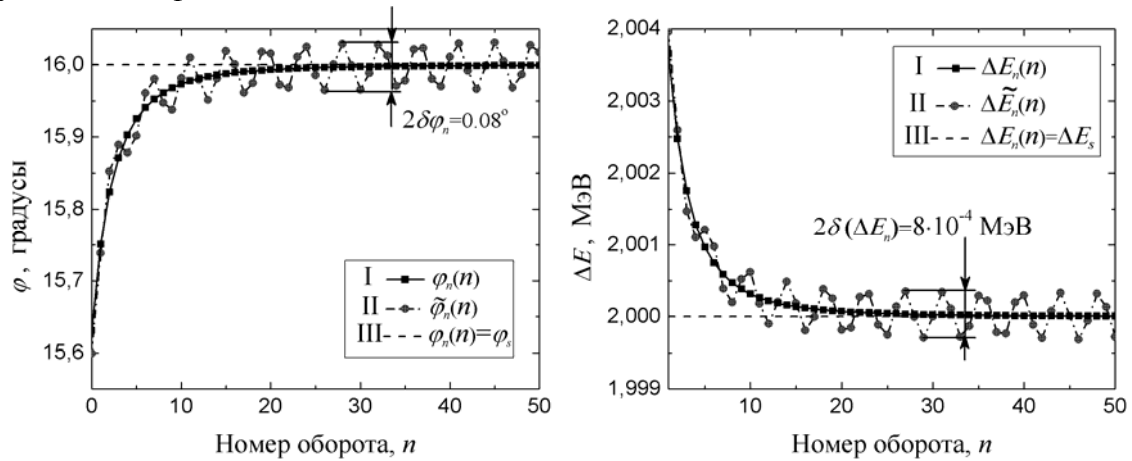


Рис. 7. Зависимость равновесной фазы частицы φ_n и равновесного прироста энергии за оборот ΔE_n от номера оборота n для $E_0=12.536$ МэВ.

I – точные зависимости φ_n и ΔE_n ;

II – значения, полученные при численном решении системы уравнений (11.1–11.2) для $l = 24.31099$ см, $\varphi_0 = 15.59940^\circ$;

III – асимптотическая равновесная фаза φ_s и асимптотический равновесный прирост энергии ΔE_s .

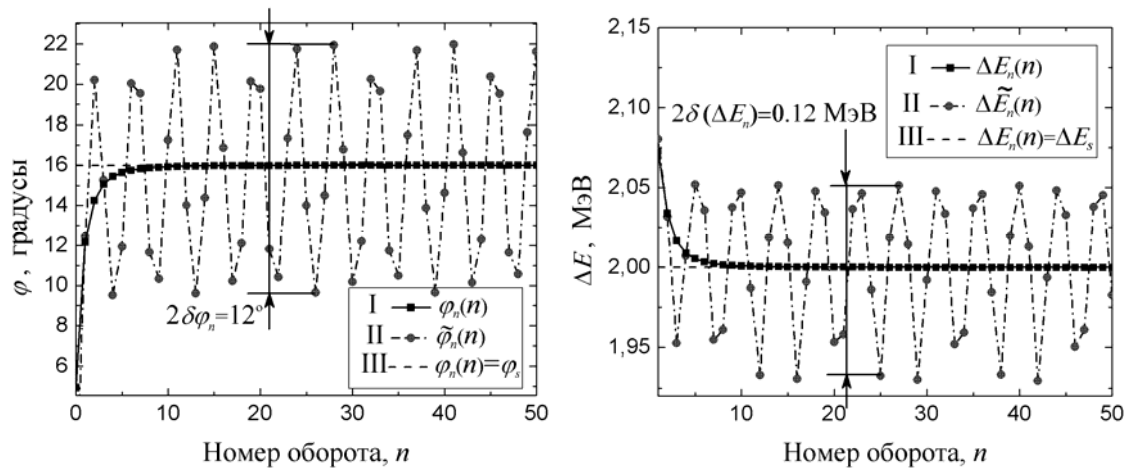


Рис. 8. Зависимость равновесной фазы частицы $\varphi_n(n)$ и равновесного прироста энергии за оборот $\Delta E_n(n)$ от номера оборота n для $E_0=2.536$ МэВ.

I – точные зависимости $\varphi_n(n)$ и $\Delta E_n(n)$;

II – значения, полученные при численном решении системы уравнений (11.1–11.2) для $l = 24.17198$ см и $\varphi_0 = -0.78873^\circ$.

III – асимптотическая равновесная фаза φ_s и асимптотический равновесный прирост энергии ΔE_s .

На рисунке 8 приведены решение для фазовой траектории с начальными значениями $l = l_{th}$, $\varphi_0 = \varphi_{0,th}$ и ее сравнение с точной равновесной траекторией. Амплитуда устойчивых колебаний оценочной равновесной фазы относительно точной составляет $\delta\varphi_n = 6^\circ$, а соответствующая амплитуда колебаний равновесного прироста энергии $\delta(\Delta E_n) = 0.06$ МэВ.

Заключение.

В настоящей главе представлен аналитический метод анализа фазового движения в разрезном микротроне с учётом зависящего от энергии сдвига фазы на участке дрейфа (но в отсутствие краевых полей магнитов). Впервые предложен аналитический подход для определения основных параметров ускорителя, учитывающий эффект сдвига фазы. Сравнение полученных результатов с численными расчётами фазовой динамики частиц показало хорошее соответствие этих данных. Точность аналитического определения равновесных параметров разрезного микротрона позволяет находить частицу, являющуюся стартовым приближением равновесной частицы и совершающую устойчивые синхротронные колебания около точных равновесных значений.

Приложение. Аналитическое вычисление параметров равновесной частицы с произвольной степенью точности.

Как уже отмечалось ранее, параметры равновесной частицы на произвольной орбите можно представить в виде разложения по степеням $\varepsilon_n \equiv \Delta E_s / E_{n,s}$. Для нахождения коэффициентов этих разложений представим решение системы разностных уравнений (18.1–18.2) в виде ряда по степеням ε_n :

$$\psi_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varepsilon_n^i, \quad (43.1)$$

$$w_n = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \varepsilon_n^i, \quad (43.2)$$

где a_i, b_i – коэффициенты, не зависящие от ε_n . Так как ε_n являются независимыми переменными, то подставив разложения (43.1), (43.2) в систему уравнений (18.1), (18.2), разложив функции $F(\psi_n)$, $\Delta K(\varepsilon_n, w_n)$ в (19), (20) по ε_n^i и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε_n в правой и левой частях равенств, получим систему алгебраических рекуррентных уравнений относительно коэффициентов a_i, b_i . Решая эту систему стандартными методами, можно получить коэффициенты вплоть до любого наперед заданного порядка по i .

Используя указанный подход, мы получили поправки порядка ε_n^{15} в выражениях (27), (28) для фазы и энергии равновесной частицы, первые пять из которых имеют вид:

$$\psi_n = -\frac{2l}{\lambda v \tan \varphi_s} \kappa^2 \varepsilon_n^3 \left[1 - \frac{3}{2} \varepsilon_n + 2 \left(1 + \frac{3}{2} \kappa^2 - \frac{6}{\pi v \tan \varphi_s} \right) \varepsilon_n^2 + O(\varepsilon_n^3) \right], \quad (44)$$

$$w_n = -\frac{2\pi l}{\lambda} \kappa^2 \varepsilon_n^2 \left[1 + \frac{3}{4} \left(\kappa^2 - \frac{4}{\pi v \tan \varphi_s} \right) \varepsilon_n^2 + \frac{2\pi l}{\lambda} \kappa^2 \varepsilon_n^3 + O(\varepsilon_n^4) \right], \quad (45)$$

где, κ и ε_n определены равенствами (15), (17). Фаза и энергия равновесной частицы вычисляются по формулам $\varphi_n = \varphi_{n,s} + \psi_n$ и $E_n = E_{n,s} + (\Delta E_s / 2\pi v) w_n$ соответственно. Заметим, что в качестве безразмерного параметра разложения может быть использована также величина $\varepsilon_n \kappa = mc^2 / E_{n,s}$, коэффициенты рядов при этом получают простым пересчетом из (44), (45).

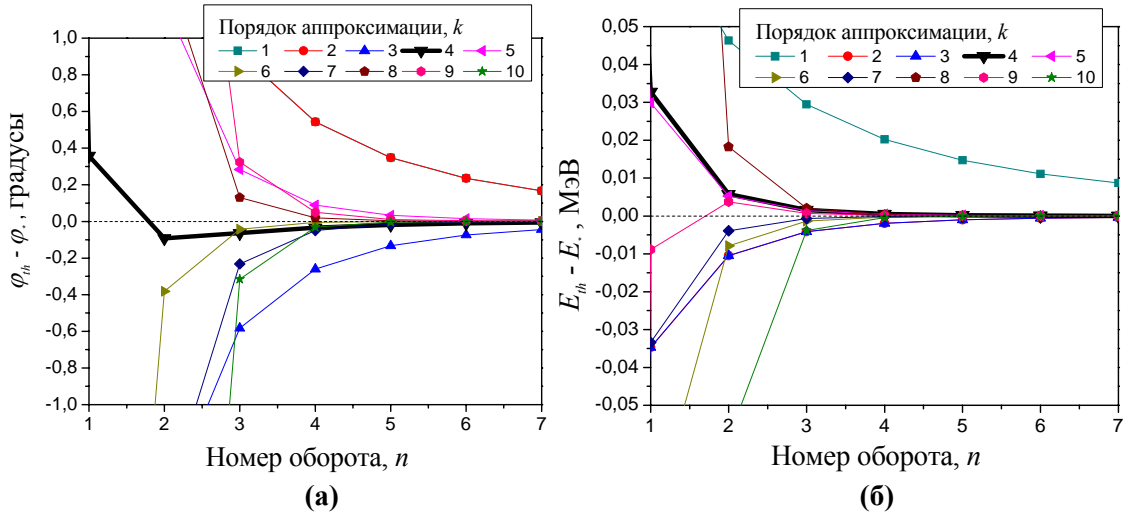


Рис. 9. Зависимости точностей аналитических формул для равновесной фазы (а) и равновесной энергии (б) от номера оборота, на котором эти формулы применяются, при различных порядках аппроксимации.

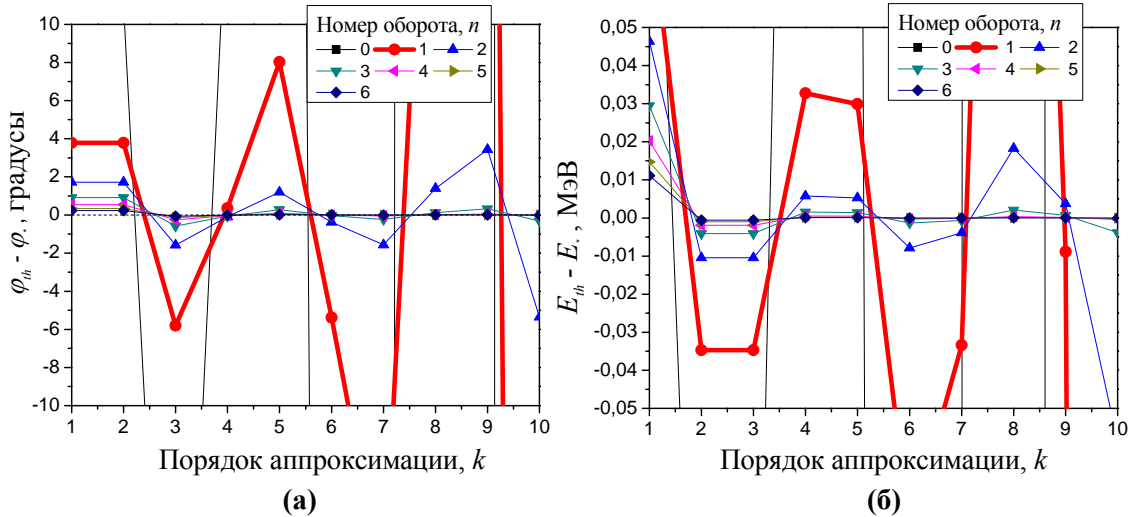


Рис. 10. Зависимости точностей аналитических формул для равновесной фазы (а) и равновесной энергии (б) от порядка аналитической аппроксимации при различных номерах оборотов, на которых эти формулы применяются.

Для определения количества слагаемых в выражениях (44) и (45), наилучшим образом аппроксимирующих точные значения энергии и фазы равновесной частицы, удобно выбрать конкретные значения κ и ε_0 , при которых точность аналитических формул окажется наихудшей. Естественно, что этот выбор следует

производить среди таких значений, которые могут быть реализованы на практике. К примеру, возьмём $\kappa = 0.255$ и $\varepsilon_0 = 0.784$ [10] ($\Delta E_{\max} = 2.08$ МэВ, $E_0 = 2.536$ МэВ, $\lambda = 5$ см). В этом случае энергия инжекции всего в ~ 4 раза больше энергии покоя электрона и соизмерима с равновесным приростом энергии. Очевидно, что для случаев с меньшими значениями κ и ε_0 точность аналитических формул будет заметно выше для любого порядка аппроксимации.

На рисунках 9 и 10 приведены зависимости отклонения равновесных фазы φ_{th} и энергии E_{th} , определяемых с помощью формул (44) и (45), от точных равновесных значений φ_* и E_* , определяемых с помощью численного решения системы (18.1), (18.2). Как видно из этих рисунков, наилучшим приближением является использование разложения по степеням ε_n^k вплоть до $k=4$.

Список литературы.

- [1]. С.П. Капица, В.Н. Мелехин, *Микротрон*, М., Издательство наука, 1969.
- [2]. Roy E. Rand, *Recirculating Electron Accelerators*, Harwood Academic Publishers, New York, 1984.
- [3]. А.А. Коломенский, *Исследование по теории движения частиц в современных циклических ускорителях*, Диссертация, ФИАН, 1956.
- [4]. В.Н. Мелехин, *ЖЭТФ*, т.61, №4 (1971) 1319.
- [5]. В.К. Гришин, М.А. Сотников, В.И. Шведун, *Вестник МГУ*, сер. физика, астрономия, т. 27, №2 (1986) 26.
- [6]. PTRACE, К-Х. Кайзер, личное сообщение.
- [7]. RTMPTRACE, В.Г. Геворкян, А.Б. Савицкий, М.А. Сотников, В.И. Шведун, рукопись, депонированная в ВИНТИ, №678-88, 1988.
- [8]. V.I. Shvedunov, R.A. Barday, D.A. Frolov, V.P. Gorbachev, E.A. Knapp, G.A. Novikov, N.I. Pakhomov, I.V. Shvedunov, V.S. Skachkov, N.P. Sobenin, W.P. Trower, S.A. Tyurin, A.A. Vetrov, V.R. Yajlijan, and D.A. Zayarny, *A Racetrack Microtron with High Brightness Beams*, *Nucl. Instrum. Meth.* A531 (2004) 346-366
- [9]. V.I. Shvedunov, A.N. Ermakov, I.V. Gribov, E.A. Knapp, G.A. Novikov, N.I. Pakhomov, I.V. Shvedunov, V.S. Skachkov, N.P. Sobenin, W.P. Trower, and V.R. Yajlijan, *70 MeV Racetrack Microtron*, *Nucl. Instrum. Meth.* A550 (2005) 39-53.
- [10]. B.S. Ishkhanov, N.I. Pakhomov, N.V. Shvedunov, V.I. Shvedunov, V.P. Gorbachev, *Conceptual design of the miniature electron accelerator dedicated to IORT*, *Proceedings of RuPAC XIX, Dubna 2004*.

**Борис Саркисович Ишханов
Юрий Александрович Кубышин
Антон Владимирович Посеряев
Василий Иванович Шведунов**

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ И ЧИСЛЕННОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ ФАЗОВОГО ДВИЖЕНИЯ В РАЗРЕЗНОМ
МИКРОТРОНЕ.**

Препринт НИИЯФ МГУ – 2006 – 3/802

Работа поступила в ОНТИ 14.03.2006 г.