Построение интегрируемых космологических моделей с двумя скалярными полями

Конференция НИИЯФ МГУ по научным исследованиям и результатам 2024 года

С.Ю. Вернов[1] и В.Р. Иванов[2]

[1]НИИ Ядерной Физики МГУ
[2]Физический факультет МГУ

24.02.2025

На основе работ:
V.R. Ivanov, S.Yu. Vernov, Phys. Part. Nuclei (ЭЧАЯ) **56** (2025) to be published, arXiv:2407.05002;
V.R. Ivanov, S.Yu. Vernov, Phys. Rev. D. **110** (2024) 103519, arXiv:2407.12732.

Введение

- Вселенная изотропна на больших масштабах, поэтому большинство космологических моделей включают в себя скалярные поля.
- Однополевые модели с неминимальной связью скалярного поля с гравитацией могут быть преобразованы в модель ОТО с минимально связанным скалярным полем (переход от картины Йордана к картине Эйнштейна).
- Модели с несколькими скалярными полями и неминимальной связью с гравитацией, в общем случае, сводятся к модели ОТО с минимально связанными полями и нестандартным кинетическим членом, иными словами, получается киральная космологическая модель (ККМ).

Цель работы — поиск интегрируемых космологических моделей с несколькими скалярными полями и нетривиальными потенциалами.

Результаты:

- 1) Построены модели с N скалярными полями, неминимально взаимодействующими с гравитацией, для которых скаляр Риччи R является интегралом движения в произвольной метрике.
- 2) В пространственно плоской метрике Фридмана–Леметра–Робертсона–Уокера (ФЛРУ) построили интегрируемую модель с N скалярными полями и получили общие решения уравнений эволюции в эллиптических функциях конформного времени.
- 3) Получены интегрируемые модели с двумя скалярными полями, имеющие общие решения в метрике ФЛРУ с произвольной пространственной кривизной, и новые интегрируемые ККМ в картине Эйнштейна.

Модель

- Рассмотрим модель метрической гравитации с действием

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left(U\left(\phi^A\right)R - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\delta_{AB}\partial_\mu\phi^A\partial_\nu\phi^B - V\left(\phi^A\right)\right),$$

где заглавные латинские индексы нумеруют поля, $A = 1, 2, \ldots N$, и опускаются и поднимаются с помощью символа Кронекера δ_{AB}. Функции $U(\phi^A)$ и $V(\phi^A)$ — дифференцируемые, R — скаляр Риччи.

УРАВНЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА

- Уравнения Эйнштейна:

$$U\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)=\nabla_\mu\nabla_\nu U-g_{\mu\nu}\Box U+\frac{1}{2}T_{\mu\nu},$$

где

$$T_{\mu\nu}=\delta_{AB}\partial_\mu\phi^A\partial_\nu\phi^B-g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\delta_{AB}\partial_\alpha\phi^A\partial_\beta\phi^B+V\right).$$

- Полевые уравнения:

$$\Box\phi^A\equiv\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi^A\right]=V_{,\phi^A}-RU_{,\phi^A}.$$

УРАВНЕНИЕ СЛЕДА

- Уравнение следа (свертка уравнений Эйнштейна с метрическим тензором):

$$3\Box U - UR = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\delta_{AB}\partial_\mu\phi^A\partial_\nu\phi^B - 2V.$$

- Используя полевые уравнения, получаем

$$\Box U = U_{,\phi^A}\left[V_{,\phi^A} - RU_{,\phi^A}\right] + U_{,\phi^A\phi^B}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi^A\partial_\beta\phi^B,$$

и

$$\left(3U^2_{,\phi^A} + U\right)R - \left[3U_{,\phi^A\phi^B} + \frac{\delta_{AB}}{2}\right]g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi^A\partial_\beta\phi^B = 3U_{,\phi^A}V_{,\phi^A} + 2V.$$

Модель с постоянным $R = R_0$

- Пусть
$$U = U_0 - \frac{\delta_{AB}}{12}\left(\phi^A - \phi_0^A\right)\left(\phi^B - \phi_0^B\right),$$
где $\phi_0^A = \mathrm{const}$ и $U_0 = \mathrm{const}$.
- Уравнение следа примет вид
$$\frac{1}{2}\left(\phi^A - \phi_0^A\right)V_{,\phi^A} - 2V + U_0 R = 0.$$
- Если $R = R_0 = \mathrm{const}$, то уравнение следа можно рассматривать как линейное УрЧП с потенциалом как неизвестной функцией. Общее решение уравнения:
$$V = \frac{R_0 U_0}{2} + \left(\phi^1 - \phi_0^1\right)^4 f\left(\frac{\phi^2 - \phi_0^2}{\phi^1 - \phi_0^1}, \frac{\phi^3 - \phi_0^3}{\phi^1 - \phi_0^1}, \ldots, \frac{\phi^N - \phi_0^N}{\phi^1 - \phi_0^1}\right),$$
где f — произвольная дифференцируемая функция.

Модель с интегралом движения $R = R_0$

- Если
$$U = U_0 - \frac{\delta_{AB}}{12}\left(\phi^A - \phi_0^A\right)\left(\phi^B - \phi_0^B\right),$$
и
$$V = \frac{R_0 U_0}{2} + (\phi^1 - \phi_0^1)^4 f\left(\frac{\phi^2 - \phi_0^2}{\phi^1 - \phi_0^1}, \frac{\phi^3 - \phi_0^3}{\phi^1 - \phi_0^1}, \dots, \frac{\phi^N - \phi_0^N}{\phi^1 - \phi_0^1}\right),$$
то скаляр Риччи R является интегралом движения рассматриваемой модели, $R = R_0$.

Мы рассматриваем случай $U_0 > 0$, чтобы иметь возможность построить ККМ без фантомных полей.
Без потери общности можно положить все $\phi_0^A = 0$.

Однополевая модель

Однополевая модель с интегралом движения $R = R_0$ была найдена с работе

B. Boisseau, H. Giacomini, D. Polarski, and A.A. Starobinsky, *JCAP* **07** (2015) 002, arXiv:1504.07927.

Соответствующая модель в картине Эйнштейна имеет потенциал

$$V_{\rm BC} = c_1 \cosh^4\left(\frac{\varphi}{\sqrt{6}M_{\rm Pl}}\right) + c_2 \sinh^4\left(\frac{\varphi}{\sqrt{6}M_{\rm Pl}}\right),$$

где c_i — константы.

Эта модель рассматривалась в работах

I. Bars and S.-H. Chen, *Phys. Rev.* **D 83** (2011) 043522,

I. Bars, S.-H. Chen, P.J. Steinhardt and N. Turok, Phys. Rev. D **86** (2012) 083542,

A.Yu. Kamenshchik, E.O. Pozdeeva, A. Tronconi, G. Venturi, and S.Yu. Vernov, *Class. Quant. Grav.* **33** (2016) 015004.

Двухполевая модель

- Для двухполевого случая, мы рассматриваем метрику ФЛРУ с произвольной кривизной, определяемой знаком K:

$$ds^2 = a^2(\tau)\left(-d\tau^2 + \frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2(\theta)d\varphi^2\right).$$

и получаем уравнения ($h = \dot{a}/a$):

$$6U\left[h^2 + K\right] + 6h\dot{U} = \frac{1}{2}\left[\left(\dot{\phi}^1\right)^2 + \left(\dot{\phi}^2\right)^2\right] + a^2 V,$$

$$U\left[2\dot{h} + h^2 + K\right] + \ddot{U} + H\dot{U} = \frac{1}{2}a^2 V - \frac{1}{4}\left[\left(\dot{\phi}^1\right)^2 + \left(\dot{\phi}^2\right)^2\right],$$

$$\ddot{\phi}^A + 2h\dot{\phi}^A - 6U_{,\phi^A}a^2 R + a^2 V_{,\phi^A} = 0,$$

$$R = \frac{6}{a^2}\left(\frac{\ddot{a}}{a} + K\right) = R_0.$$

Уравнение $R = R_0$

Интегрируя $R = R_0$,

$$\ddot{a} + Ka = \frac{R_0}{6} a^3, \qquad (1)$$

получаем

$$\dot{a}^2 + Ka^2 = \frac{R_0}{12} a^4 + C, \qquad (2)$$

где C — константа интегрирования.
Если $R_0 > 0$, то (2) имеет общее решение в терминах эллиптических функций Якоби.
Для $R_0 = 0$, получаем

$$a(\tau) = \begin{cases} a_1 \sin(\sqrt{K}\tau) + a_2 \cos(\sqrt{K}\tau), & K > 0; \\ a_1 \tau + a_0, & K = 0; \\ a_1 \sinh(\sqrt{-K}\tau) + a_2 \cosh(\sqrt{-K}\tau), & K < 0; \end{cases} \qquad (3)$$

где a_i — произвольные константы.

ПАРАМЕТР ХАББЛА $H(t)$

Для анализа эволюции Вселенной переходим к космическому времени t: $h = aH$, $\dot{U} = a\frac{dU}{dt}$. Получаем уравнение

$$6U_0H^2 + 6U_0\frac{K}{a^2} = \frac{1}{2}U_0R_0 + \frac{E}{a^4}. \qquad (4)$$

и параметр Хаббла

$$H(t) = \frac{\pm\sqrt{3R_0}\left(2EU_0R_0 - 36K^2U_0^2 + R_0\,\mathrm{e}^{\pm\sqrt{\frac{R_0}{3}}(t-t_0)}\right)}{6\left[36K^2U_0^2 + 12KU_0\sqrt{R_0}\,\mathrm{e}^{\pm\sqrt{\frac{R_0}{3}}(t-t_0)} + R_0\,\mathrm{e}^{\pm2\sqrt{\frac{R_0}{3}}(t-t_0)} - 2U_0R_0E\right]}.$$

При $K = 0$,

$$H(t) = \frac{\sqrt{3R_0}\left(\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\sqrt{3R_0}\,t} + B\right)}{6\left(\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\sqrt{3R_0}\,t} - B\right)},$$

где B — константа.

ГАМИЛЬТОНИАН

Чтобы найти решения для скалярных полей, мы подставляем $\phi^A = y^A/a$ в уравнения поля и получаем:

$$\ddot{y}^A + Ky^A + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y^A} = 0, \qquad (5)$$

где

$$\tilde{V}\left(y^1, y^2\right) = \left(y^1\right)^4 f\left(\frac{y^2}{y^1}\right).$$

Система (5) является гамильтоновой с

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(p^1\right)^2 + \frac{1}{2}\left(p^2\right)^2 + \frac{K}{2}\left[\left(y^1\right)^2 + \left(y^2\right)^2\right] + \tilde{V}, \qquad (6)$$

где p_i — моменты и имеет первый интеграл

$$\frac{1}{2}\left(\dot{y}^1\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\dot{y}^2\right)^2 + \frac{K}{2}\left[\left(y^1\right)^2 + \left(y^2\right)^2\right] + \tilde{V} = E, \qquad (7)$$

где E — константа интегрирования.

Двухполевая модель. Действие в картине Эйнштейна

- Совершим конформное преобразование метрики

$$g^{(\mathrm{E})}_{\mu\nu} = \frac{2U}{M_{\mathrm{Pl}}^2} g_{\mu\nu}.$$

- Действие в картине Эйнштейна:

$$S_{\mathrm{E}} = \int d^4x \sqrt{-g^{(\mathrm{E})}} \left(\frac{M_{\mathrm{Pl}}^2}{2} R_{\mathrm{E}} - \frac{g^{(\mathrm{E})\mu\nu}}{2} \sum_{A,B=1}^{2} K_{AB} \partial_\mu \phi^A \partial_\nu \phi^B - V_{\mathrm{E}} \right).$$

Здесь

$$K_{AB} = \frac{M_{\mathrm{Pl}}^2}{2U} \left(\delta_{AB} + \frac{3}{U} U_{,\phi^A} U_{,\phi^B} \right),$$

$$V_{\mathrm{E}} = \frac{M_{\mathrm{Pl}}^4}{4U^2} V.$$

Двухполевая модель. Действие в картине Эйнштейна

- Для выбранной функции $U(\phi^1, \phi^2)$ матрица K_{AB} — не диагональная:

$$
\begin{aligned}
K_{11} =& \frac{M_{\mathrm{Pl}}^2}{2U^2}\left(U + \frac{1}{12}\left(\phi^1\right)^2\right),\\
K_{12} =& K_{21} = \frac{M_{\mathrm{Pl}}^2}{24U^2}\phi^1\phi^2,\\
K_{22} =& \frac{M_{\mathrm{Pl}}^2}{2U^2}\left(U + \frac{1}{12}\left(\phi^2\right)^2\right).
\end{aligned}
$$

Двухполевая модель. Действие в картине Эйнштейна

- введем новую “массовую” матрицу G согласно

$$K_{CD}\partial_\mu\phi^C\partial_\nu\phi^D = K_{CD}\frac{\partial\phi^C}{\partial\chi^A}\frac{\partial\phi^D}{\partial\chi^B}\partial_\mu\chi^A\partial_\nu\chi^B = G_{AB}\partial_\mu\chi^A\partial_\nu\chi^B.$$

- Новые поля χ^1 и χ^2 определим так:

$$\phi^1 = \sqrt{12U_0}\tanh\frac{\chi^2}{\sqrt{6}M_{\rm Pl}}, \quad \phi^2 = \frac{\sqrt{12U_0}}{\cosh\frac{\chi^2}{\sqrt{6}M_{\rm Pl}}}\tanh\frac{\chi^1}{\sqrt{6}M_{\rm Pl}}.$$

- Тогда

$$\begin{aligned} G_{11} &= 1, \\ G_{12} &= G_{21} = 0, \\ G_{22} &= \cosh^2\left(\frac{\chi^1}{\sqrt{6}M_{\rm Pl}}\right). \end{aligned}$$

Двухполевая модель. Действие в картине Эйнштейна

- Перепишем $S_{\rm E}$, U и V в терминах новых полей:

$$S_{\rm E} = \int d^4x\sqrt{-g^{(\rm E)}}\left(\frac{M_{\rm Pl}^2}{2}R^{(\rm E)} - \frac{g^{(\rm E)\mu\nu}}{2}\left[\partial_\mu\chi^1\partial_\nu\chi^1 + \cosh^2\left(\frac{\chi^1}{\sqrt{6}M_{\rm Pl}}\right)\partial_\mu\chi^2\partial_\nu\chi^2\right] - V_{\rm E}\right),$$

$$U(\chi^1,\chi^2) = \frac{U_0}{\cosh^2\left(\frac{\chi^1}{\sqrt{6}M_{\rm Pl}}\right)\cosh^2\left(\frac{\chi^2}{\sqrt{6}M_{\rm Pl}}\right)}.$$

$$V_{\rm E} = \frac{M_{\rm Pl}^4\left(\cosh\frac{\chi^1}{\sqrt{6}M_{\rm Pl}}\cosh\frac{\chi^2}{\sqrt{6}M_{\rm Pl}}\right)^2}{4U_0}\left(\frac{R_0}{2} + 144U_0\left[\tanh\frac{\chi^2}{\sqrt{6}M_{\rm Pl}}\right]^4 f\left(\frac{\tanh\frac{\chi^1}{\sqrt{6}M_{\rm Pl}}}{\sinh\frac{\chi^2}{\sqrt{6}M_{\rm Pl}}}\right)\right).$$

Двухполевая модель. Потенциал ϕ^4

- Выберем потенциал

$$V(\phi^1,\phi^2)=\frac{R_0U_0}{2}+c_1\left(\phi^1\right)^4+c_2\left(\phi^2\right)^4$$

для ККМ имеем

$$V_{\mathrm{E}}=\frac{M_{\mathrm{Pl}}^4}{4U_0^2}\left[\frac{1}{2}R_0U_0\cosh^4\left(\frac{\chi^1}{\sqrt{6}M_{\mathrm{Pl}}}\right)\cosh^4\left(\frac{\chi^2}{\sqrt{6}M_{\mathrm{Pl}}}\right)\right.$$
$$\left.+(12U_0)^2c_1\cosh^4\left(\frac{\chi^1}{\sqrt{6}M_{\mathrm{Pl}}}\right)\sinh^4\left(\frac{\chi^2}{\sqrt{6}M_{\mathrm{Pl}}}\right)+(12U_0)^2c_2\sinh^4\left(\frac{\chi^1}{\sqrt{6}M_{\mathrm{Pl}}}\right)\right].$$

- Решения для этой ККМ можно найти, используя полученные решения в картине Йордана.

Потенциал $V = \frac{1}{2}R_0U_0 + c\left(\left(\sigma^1\right)^2 + \left(\sigma^2\right)^2\right)^2$

Для потенциала

$$V_2 = \frac{1}{2}R_0U_0 + c\left(\left(\sigma^1\right)^2 + \left(\sigma^2\right)^2\right)^2, \tag{8}$$

где c — константа уравнения полей имеют вид:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dy^1}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dy^2}{d\tau}\right)^2 + \frac{K}{2}\left(\left(y^1\right)^2 + \left(y^2\right)^2\right) + c\left(\left(y^1\right)^2 + \left(y^2\right)^2\right)^2 = E.$$

Вводя “полярные координаты”,

$$y^1(\tau) = \rho(\tau)\cos\left(\theta(\tau)\right), \quad y^2(\tau) = \rho(\tau)\sin\left(\theta(\tau)\right),$$

получаем

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\rho}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{2}\rho^2\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 + \frac{K}{2}\rho^2 + c\rho^4 = E.$$

Используя

$$\rho^2\frac{d\theta}{d\tau} = L = \mathrm{const},$$

получаем уравнение для ρ:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\rho}{d\tau}\right)^2 + \frac{L^2}{2\rho^2} + \frac{K}{2}\rho^2 + c\rho^4 = E. \qquad (9)$$

Точные решения

- Решения в конформном времени записываются через эллиптические функции Якоби.
- $$F\left(\varphi\,|\,m\right)=\int\limits_0^{\varphi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-m\sin^2\theta}},$$

  — неполный эллиптический интеграл первого рода, $K(m)\equiv F(\pi/2\,|\,m)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, и эллиптические функции Якоби sn, cn и dn. По определению, если $u=F\left(\varphi\,|\,m\right)$, то

  $$\mathrm{am}\left(u\,|\,m\right)=\varphi, \qquad \mathrm{dn}\left(u\,|\,m\right)=\frac{d}{du}\mathrm{am}\left(u\,|\,m\right),$$
  $$\mathrm{sn}\left(u\,|\,m\right)=\sin\left(\mathrm{am}\left(u\,|\,m\right)\right), \qquad \mathrm{cn}\left(u\,|\,m\right)=\cos\left(\mathrm{am}\left(u\,|\,m\right)\right).$$

При $c > 0$,

$$\rho(\tau) = \sqrt{\rho_0^2 - (\rho_0^2 - \rho_1^2)\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{\sqrt{v_0 - v_2}}{2\beta}\tau + C_\rho \middle| \frac{v_0 - v_1}{v_0 - v_2}\right)}. \quad (10)$$

где C_ρ — константа интегрирования,

$$\rho_{0,1}^2 = \alpha\, v_{0,1},$$

$$v_k = \cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{\frac{K^3}{216} + \frac{1}{12}KEc + \frac{1}{4}L^2c^2}{\left(\frac{1}{3}Ec + \frac{1}{12}K^2\right)^{3/2}}\right) - \frac{2\pi k}{3}\right) - \frac{K}{2c\alpha},$$

$k = 0, 1,\quad ,$

$$\alpha = 2\sqrt{\frac{E}{3c} + \frac{K^2}{12c^2}}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{8c\alpha}}.$$

Для θ получаем:

$$\theta(\tau) = \frac{2\beta L^2}{\alpha v_0\sqrt{v_0 - v_2}}\Pi\left(1 - \frac{v_1}{v_0}; \frac{\sqrt{v_0 - v_2}}{2\beta}\tau + C_\rho \middle| \frac{v_0 - v_1}{v_0 - v_2}\right) + C_\theta.$$

где

$$\Pi\left(n; u\middle| m\right) \equiv \int\limits_0^u \frac{dw}{1 - n\,\mathrm{sn}^2\left(w\middle| m\right)}$$

есть неполный эллиптический интеграл третьего рода, и C_θ — константа.

Потенциал ККМ

Для потенциала V_2, получаем потенциал ККМ:

$$V_{\mathrm{E}} = \frac{M_{\mathrm{Pl}}^4}{4U_0^2}\left[\frac{1}{2}R_0 U_0 \cosh^4\left(\frac{\chi^1}{\sqrt{6}M_{\mathrm{Pl}}}\right)\cosh^4\left(\frac{\chi^2}{\sqrt{6}M_{\mathrm{Pl}}}\right)\right.$$
$$+144U_0^2 c\left(\cosh^2\left(\frac{\chi^1}{\sqrt{6}M_{\mathrm{Pl}}}\right)\sinh^2\left(\frac{\chi^2}{\sqrt{6}M_{\mathrm{Pl}}}\right)\right. \tag{11}$$
$$\left.\left.+\sinh^2\left(\frac{\chi^1}{\sqrt{6}M_{\mathrm{Pl}}}\right)\right)^2\right].$$

Заключение

- Найден класс N-полевых моделей с неминимальной связью, для которых скаляр Риччи R — интеграл движения.
- Построены новые интегрируемые ККМ с двумя полями и с потенциалами в виде полиномов от гиперболических функций полей.
- Найдены общие решения уравнений эволюции в метрике ФЛРУ с произвольной кривизной. Решения получены в терминах эллиптических функций конформного времени.

Заключение

- Найден класс N-полевых моделей с неминимальной связью, для которых скаляр Риччи R — интеграл движения.
- Построены новые интегрируемые ККМ с двумя полями и с потенциалами в виде полиномов от гиперболических функций полей.
- Найдены общие решения уравнений эволюции в метрике ФЛРУ с произвольной кривизной. Решения получены в терминах эллиптических функций конформного времени.

Спасибо за внимание!